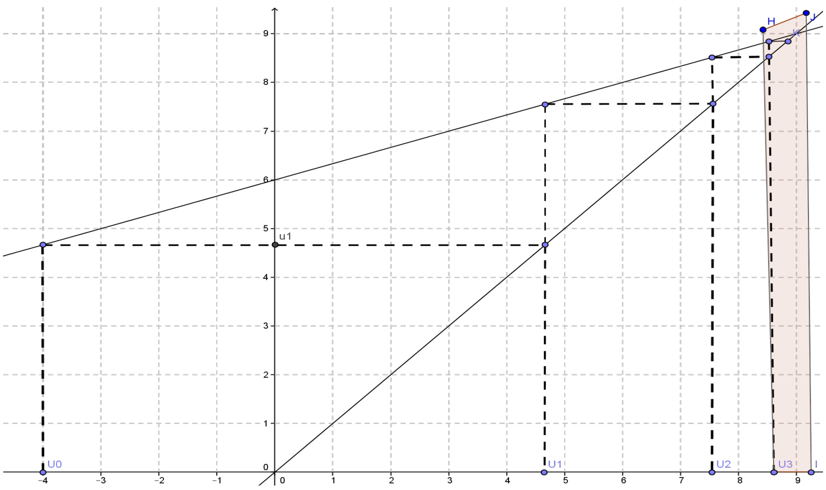
SUITES
FICHE 4 : Limite d'une suite (vers la Terminale)

1°) Limite finie

On définit la suite (U_n) par $\begin{cases} U_0 = -4 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 6 \end{cases}$

Grâce à la calculatrice on a $U_1 = 4.66$ $U_2 = 7.54$ $U_3 = 8.57$ $U4 = 8.84$ $U_{21} = 8.99$

Observation



On voit clairement sur le schéma ci–contre que les valeurs de (Un) « s'agglutinent » de plus en plus dans la zone grisée .Dès que n>4 elles se rapprochent du point fixe qui est l'abscisse du point d'intersection de la droite y=x et de la courbe y=f(x) à savoir Xo = 9.

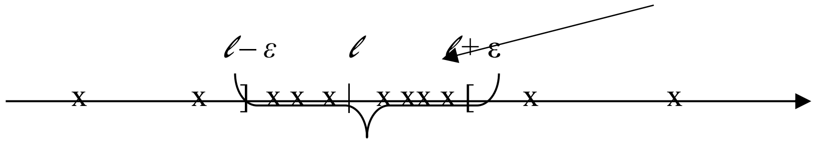
On dira que la valeur 9 est la limite de la suite (U_n) quand n tend vers $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 9$$

Définition

Lorsque, quand n augmentent indéfiniment, les termes de la suite (U_n) a pour limite un nombre réel ℓ signifie que tout intervalle ouvert I contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang N. On dit que la suite (U_n) converge vers le réel ℓ.

Les termes s'accumulent autour de ℓ



Tous les termes U_n à partir d'un indice N sont dans un intervalle I.

On écrit $$\lim_{n\to+\infty} U_n = \ell$$

Remarque :.

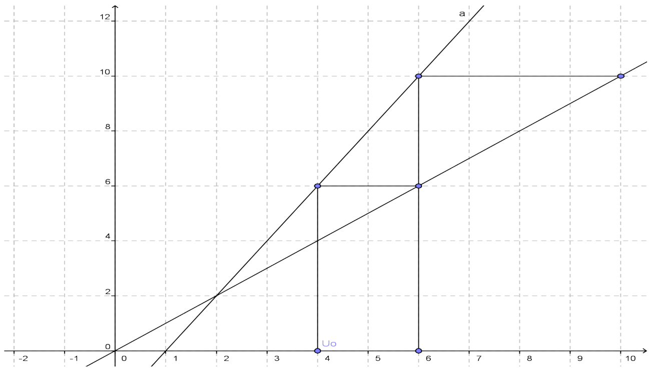
Pour tout $n \geq N$ $U_n \in \,]\ell-\varepsilon\,;\,\ell+\varepsilon[$ (ou $|U_n - \ell| < \varepsilon$)

SUITES DE REFERENCE

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$$

Propriété : Si la suite (U_n) converge alors sa limite est unique

2°) Limite infinie



On voit clairement sur le schéma ci–contre que les valeurs de (Un) deviennent de plus en plus grandes

On dira que la suite (U_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$$

Définition

Dire qu'une suite (U_n) a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]A\,;+\infty[$ ($]-\infty\,;A[$) contient tous les termes de la suite (U_n) à partir d'un certain rang.

Au plus un nombre Fini de U_n avec $n< N$

Les termes U_n arrivent à dépasser tout nombre A aussi grand soit – i l.

A $\qquad\qquad$ $+\infty$

x x x x x x]x x x x x x

Tous les termes U_n à partir d'un indice N

On écrit

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty \qquad (\text{resp } -\infty)$$

On dit que la suite (U_n) diverge vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$)

Remarque : une suite qui n'a pas de limite est aussi divergente.

SUITES DE REFERENCE

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \qquad \lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$