PROBABILITES DE BASE

I UNIVERS -EVENEMENTS - EVENTUALITES

1°) VOCABULAIRE

Pour introduire ces nouvelles notions on va étudier un exemple.

On lance un dé non pipé et on s'intéresse au résultat porté sur sa face supérieure.

On peut obtenir 1, 2, 3, 4 , 5 ou 6.

Ce sont les **éventualités** ou **cas possibles**.

- L'ensemble de toutes les éventualités c'est-à-dire dans notre exemple {1,2,3,4,5,6} est **l'univers Ω.**
- Un **événement** est une partie de l'univers .

EXEMPLE : Dans le cas du dé on considère l'événement A :« obtenir un nombre pair ».

A= {2 ,4 ,6}

On considère maintenant l'événement B : « Obtenir un nombre inférieur ou égal à 3 »

B= {1,2, 3}

- Un **événement élémentaire** est un événement qui a un seul élément .

EXEMPLE : L'événement e_1 : « Obtenir 1 » soit e_1= {1} (c'est le singleton {1})
L'événement e_2 : « Obtenir 2 » soit e_2= {2}(‘' ‘' {2})
etc....

- **L'événement impossible** est désigné par l'ensemble vide noté ∅

EXEMPLE : L'événement T: « Obtenir un nombre supérieur à 7 »

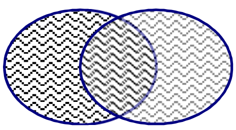
- **L'événement certain** est l'univers Ω tout entier.

EXEMPLE : L'événement G : « Obtenir un nombre entier compris entre 1 et 6 »

2°) OPERATIONS SUR LES EVENEMENTS

a) NOTIONS A CONNAITRE

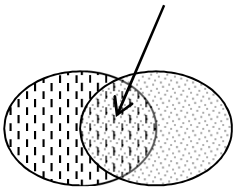
- REUNION DE 2 ENSEMBLES



A ∪ B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **OU** à B.

Remarque : Quand il y aura **OU** dans la définition d'un événement cela se traduira mathématiquement par ∪.(**union**).

- INTERSECTION DE 2 ENSEMBLES .



A ∩ B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A **ET** à B.

Remarque : Quand il y aura **ET** dans la définition d'un événement cela se traduira mathématiquement par ∩. (**intersection**).

EXEMPLE : 1.Dans le cas du dé déterminer

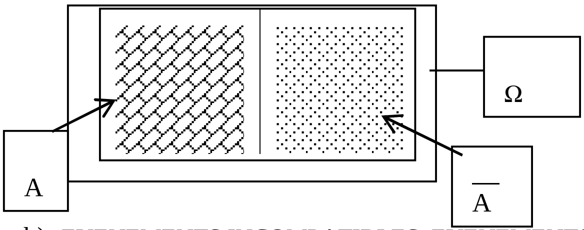
l'événement A : « obtenir un nombre pair » ; A = { 2, 4 , 6}
l'événement B : « obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 » B = {1, 2 , 3 , 4}
l'événement C : « obtenir un nombre pair ou un nombre inférieur ou égal à 4 »
C = A U B = {1, 2, 3, 4, 6}
l'événement D : « obtenir un nombre pair et un nombre inférieur ou égal à 4 »
D= A $\cap$ **B =** {2, 4}

2. En utilisant les événements E={1,2} et H={1,3,5} ,donner une définition (« avec des mots ») des événements suivants :
G={1,2,3,5} et F = { 1}.

l'événement E: « obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 »
l'événement H: « obtenir un nombre impair » ;
l'événement G : « obtenir un nombre impair ou un nombre inférieur ou égal à 2 »
l'événement F : « obtenir un nombre impair et un nombre inférieur ou égal à 2 »

- COMPLEMENTAIRE D'UN ENSEMBLE

Soit Ω un ensemble ;$A \subset \Omega$.
Le **complémentaire de A** dans Ω noté $\overline{A}$ est l'ensemble des éléments de Ω qui **n'appartiennent pas à A** .



Remarque :
$A \cap \overline{\mathbf{A}} = \emptyset$

b) EVENEMENTS INCOMPATIBLES, EVENEMENTS CONTRAIRES.

- Définition 1 : Deux événements A et B sont **incompatibles** lorsque **A $\cap$ B = $\emptyset$** .

EXEMPLE : Donner dans le cas du dé l'exemple de deux événements incompatibles.
A : Obtenir un nombre pair et B :obtenir un nombre impair
A= {2 , 4 , 6} B = { 1, 3, 5 } A $\cap$ **B = $\emptyset$**
C : « obtenir un nombre inférieur ou égal à 2 » D « obtenir 5 » C$\cap$**D = $\emptyset$**

- Définition 2 : Si A est un événement d'un univers Ω , alors le complémentaire $\overline{A}$ est **l'événement contraire** de A .

EXEMPLE : Déterminer les événements contraires de A et B où
A : « obtenir un nombre inférieur ou égal à 3 » A = { 1, 2, 3}
B : « obtenir un nombre pair ou inférieur ou égal à 3 » B = {1, 2, 3 , 4 , 6}

$\overline{A}$: « obtenir un nombre strictement supérieur à 3 » $\overline{A}$ = { 4,5,6}

$\overline{B}$: « obtenir un nombre impair et strictement supérieur à 3 » $\overline{B}$ = { 5}

II CALCUL DE PROBABILITES

1°) DEFINITION

Dans le cas du dé si je considère l'événement élémentaire e_1 : « obtenir 1 » , j'ai « une chance sur 6 » de réaliser cette éventualité .

$\frac{1}{6}$ est la probabilité de l'événement e_1 . on note $P(e_1) = \frac{1}{6}$.

Définition : La probabilité d'un événement est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent .

EXEMPLE : Dans le cas du dé si $A = \{1,2\}$ $P(A) = P(e_1) + P(e_2) = 1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3$.

2°) PROPRIETES

- **$0 \leq P(A) \leq 1$**
- **$P(\Omega)=1$.**

Remarque importante : soit $\Omega = \{ e_1, e_2, ... , e_n \}$ un univers contenant n événements élémentaires alors

$$\boxed{P(e_1) + P(e_2) + ... + P(e_n) = 1 .}$$

- **$P(\emptyset)=0$**
- **$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$**

Remarque :Si A et B sont incompatibles càd si $A \cap B = \emptyset$ alors

-

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

- Evénements contraires :

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

3°) Equiprobabilité

Soit $\Omega = \{ e_1, e_2, ... , e_n \}$ un univers contenant n événements élémentaires .Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité à savoir $\frac{1}{n}$

on dit que l'on est dans un cas **d'équiprobabilité**

Si A est un événement on a alors :

$$\boxed{P(A) = \frac{\textbf{nombre d'éléments de } A}{\textbf{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\textbf{nombre de cas favorables}}{\textbf{nombre de cas possibles}}}$$

EXEMPLE : Quelques cas d'équiprobabilité

- Lancer de dés non pipés ;
- Tirage d'une carte
- Tirage d'un jeton

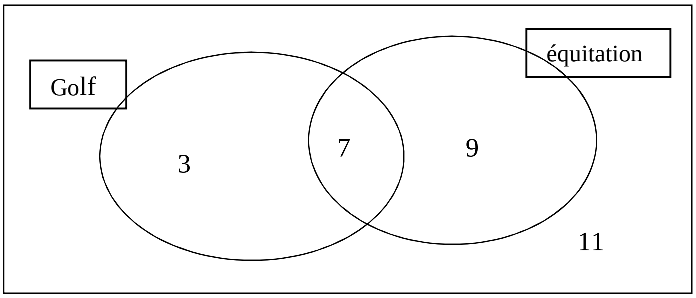
Pile ou face etc...

III) Diagrammes , tableaux, arbres

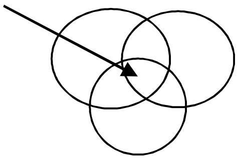
1°) Diagrammes

Dans une classe de terminale de terminale S SVT du lycée Hubert de la Grandeclasse, il y a 30 élèves. Parmi eux, 16 font de l'équitation, 10 font du golf et 7 pratiquent les deux sports. On a une situation d'équiprobabilité.
Quelle est la probabilité qu'un élève :

1) Ne pratique que de l'équitation.
2) Ne pratique que du golf.
3) Ne pratique aucun sport.



Remarque : on commence toujours par **l'intersection**. Ainsi s'il y avait 3 ensembles on commence par l'intersection des trois ensembles …



1) 9/30 2) 3/30 3) 11/30

2°) Tableaux

Dans un sachet de sucreries, il y a 360 bonbons, jaunes ou roses, de forme sphérique ou cubique.
On sait qu'il y a 25% de bonbons sphériques, et que 40% des bonbons sphériques sont jaunes. D'autre part on sait qu'il y a 55% de bonbons roses. On tire un bonbon au hasard du sachet, et tous les bonbons ont la même probabilité d'être tirés.
Calculer la probabilité des différents événements suivants :
A : « Tirer un bonbon sphérique »
B : « Tirer un bonbon jaune »
C :« Tirer un bonbon rose »
D :« Tirer un bonbon sphérique et rose»
E :« Tirer un bonbon sphérique ou rose»
F : « Tirer un bonbon ni sphérique ni rose »

	BB jaunes	BB roses	Total
BB sphériques	36	54	90
BB cubiques	126	144	270
Total	162	198	360

P(A)= 0,25 P(B)= 162/360=0,45 P(C) = 198/360=0,55 P(D) = P(A∩C)= 54/360=0,15
P(E)= P(AUC)= P(A)+P(C)- P(A∩C)= 234/360=0,65 P(F) = 1- P(E) = 126/360=0,35

3°) Les arbres

a)Cas des tirages successifs indépendants

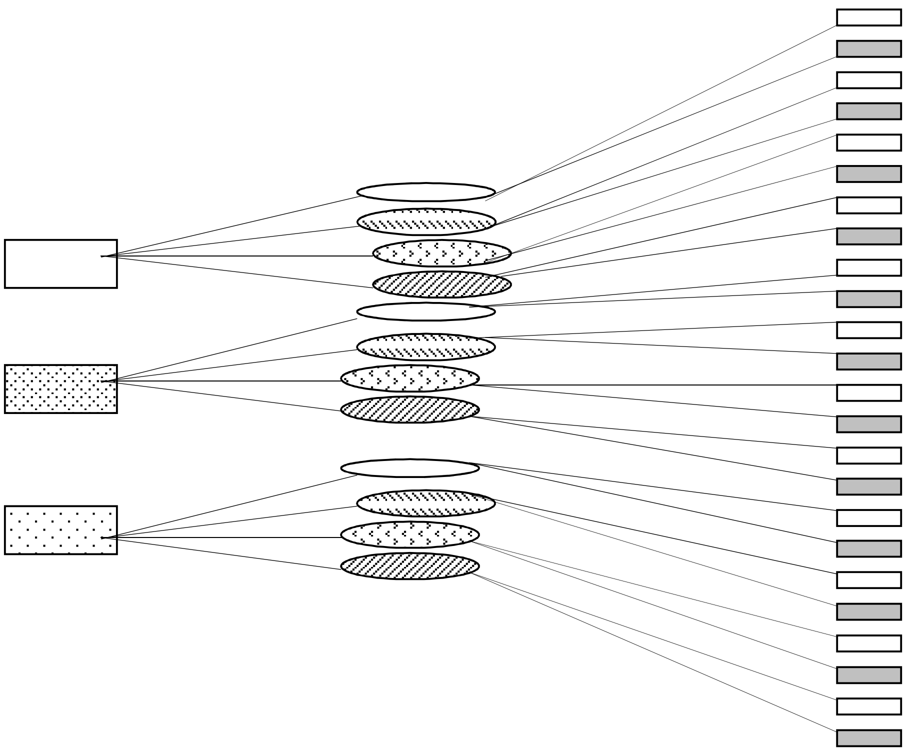
Dans un restaurant, un menu est composé d'une entrée, d'un plat et d'un dessert et il y a le choix entre 3 entrées, 4 plats et 2 desserts.

1°) Combien y a t-il de menus possibles ?

2°) Parmi les plats il y a de la langouste grillée. Combien y a t-il de menus différents comportant ce plat ?

3°) Vous allez dans ce restaurant et vous choisissez un menu au hasard. Quelle est la probabilité pour que vous preniez de la langouste grillée ?

1°)3 ENTREES 4 PLATS 2 DESERTS



3 X 4 X 2 = 24 MENUS possibles

2°) 3 x1x 2 = 6 3°)6/24=0,25

b) Tirages successifs avec remise.

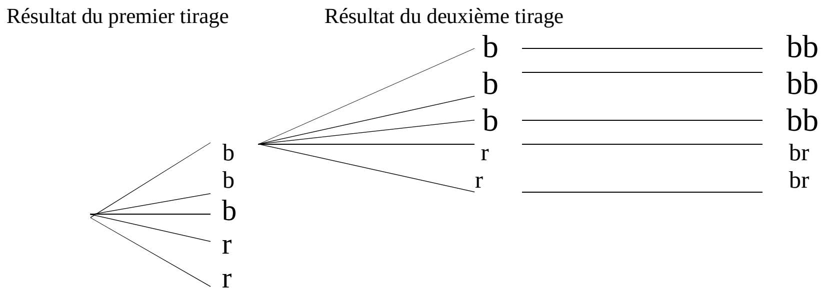
Dans un sac on a 2 boules rouges et 3 boules bleues indiscernables au toucher

On prélève au hasard une boule dont on note la couleur et on la remet dans le sac. On recommence en prenant une deuxième boule. Un résultat est un couple (première boule tirée, deuxième boule tirée).

On suppose que tous les couples possibles sont équiprobables.

1°) A l'aide d'un arbre dénombrer tous les résultats possibles.

2°) Déterminer la probabilité de l'événement A : « on a une boule bleue au premier tirage » et de l'événement B : « on a une boule bleue au deuxième tirage » puis P(A∩B).



25 résultats possibles (5 x 5)

P(A) = **15/25 = 3/5** **P(B) = 15/25 = 3/5** **P(A ∩ B) = 9/25**

<u>c) Tirages successifs sans remise.</u>

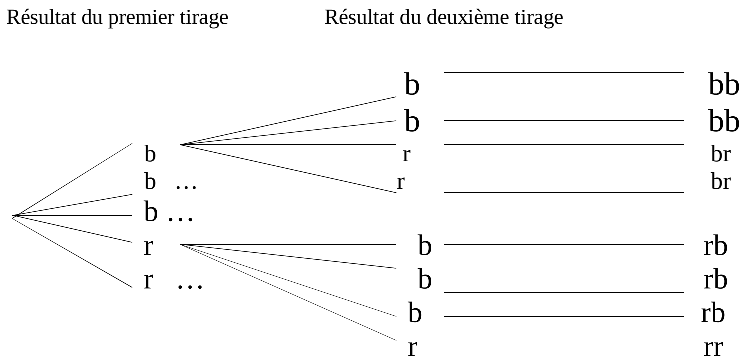
Dans un sac on a 2 boules rouges et 3 boules bleues indiscernables au toucher

On prélève au hasard une boule dont on note la couleur et **<u>on ne la remet pas dans le sac</u>**. On recommence en prenant une deuxième boule. Un résultat est un couple (première boule tirée, deuxième boule tirée).

On suppose que tous les couples possibles sont équiprobables.

1°) A l'aide d'un arbre dénombrer tous les résultats possibles.

2°) Déterminer la probabilité de l'événement A : « on a une boule bleue au premier tirage » et de l'événement B : « on a une boule bleue au deuxième tirage » et P(A ∩ B)



il y a 20 résultats possibles (5 x 4)

P(A) = 3/5

P(B) = (2 + 2 + 2 + 3 + 3)/20 = 3/5

<u>Calcul de P(A ∩B) :</u>

Il faut avoir une boule bleue au premier tirage et une boule bleue au deuxième tirage.

D'après notre premier arbre cela donne :

<u>P(A ∩ B) = (2 + 2 + 2)/20 = 3/10</u>

<u>d) Tirages répétés à deux issues</u>

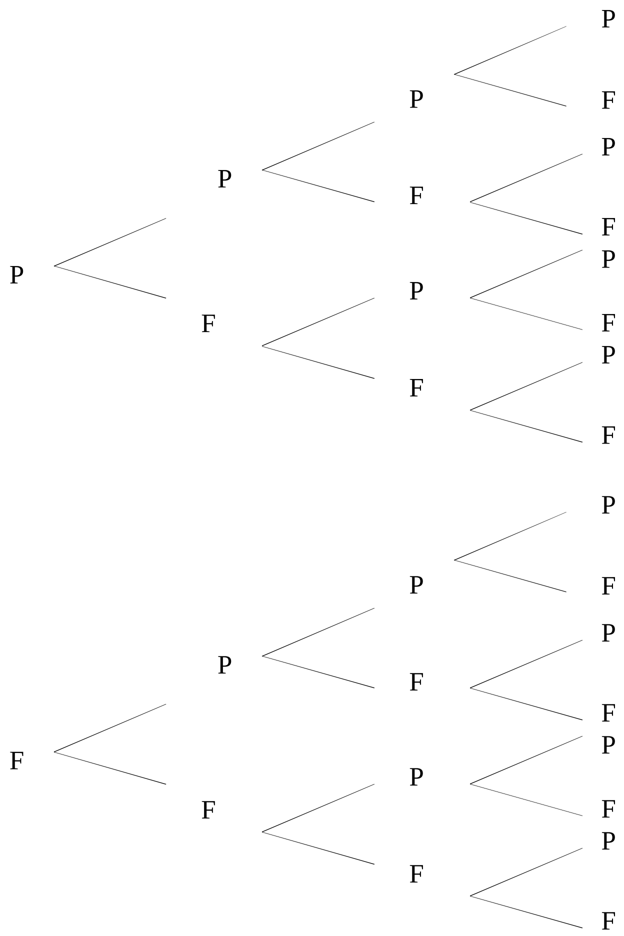
On lance quatre fois de suite une pièce de monnaie et on considère le jeu suivant :

- Si la pièce tombe 4 fois sur pile on gagne 5 fois sa mise
- Si la pièce tombe 3 fois sur pile on gagne 2 fois sa mise
- Si la pièce tombe au moins 2 fois sur face on perd sa mise

On a une situation d'équiprobabilité.

1°) Quelle est la probabilité de gagner 5 fois sa mise ?

2°) Quelle est la probabilité de gagner quelque chose ?



1°) P(pppp) = 1/16
2°) P(pppp) + P(ppp)=
1/16 + 4/16 = 5/ 16

-

IV) VARIABLES ALEATOIRES

1°) Définition

On jette 2 dés identiques cubiques, non pipés, l'un blanc, l'autre vert dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On appelle résultat un couple (a,b) où a est le nombre de points obtenus avec le dé blanc et b le nombre de points obtenus avec le dé vert.
Tous les résultats obtenus sont réunis dans un tableau à compléter ci – dessous

	1	2	3	4	5	6
1	(1.1)	(1.2)	(1.3)	(1.4)	(1.5)	(1.6)
2	(2.1)	(2.2)	(2.3)	(2.4)	(2.5)	(2.6)
3	(3.1)	(3.2)	(3.3)	(3.4)	(3.5)	(3.6)
4	(4.1)	(4.2)	(4.3)	(4.4)	(4.5)	(4.6)
5	(5.1)	(5.2)	(5.3)	(5.4)	(5.5)	(5.6)
6	(6.1)	(6.2)	(6.3)	(6.4)	(6.5)	(6.6)

On s'intéresse alors aux sommes obtenues a + b pour un couple (a , b).On a donc le tableau ci - dessous

	1	2	3	4	5	6
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
3	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
4	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
5	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
6	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

La somme X peut prendre les valeurs : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 et 12

X est ce que l'on appelle UNE VARIABLE ALEATOIRE

Définition

Une variable aléatoire X définie sur un univers E est une grandeur numérique prenant des valeurs réelles $x_1, x_2, \dots, x_n$.

2°) Loi de probabilité

Dans notre exemple la probabilité que la somme X soit égale à 2 est

On écrit P(X = 2) = 1/36

Et on rassemble toutes les probabilités correspondant aux valeurs prises par X dans un même tableau.
C'est la loi de probabilité de X.

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5 /36	6/36	5 /36	4/36	3/36	2/36	1/36

Définition

Soit X une variable aléatoire telle que

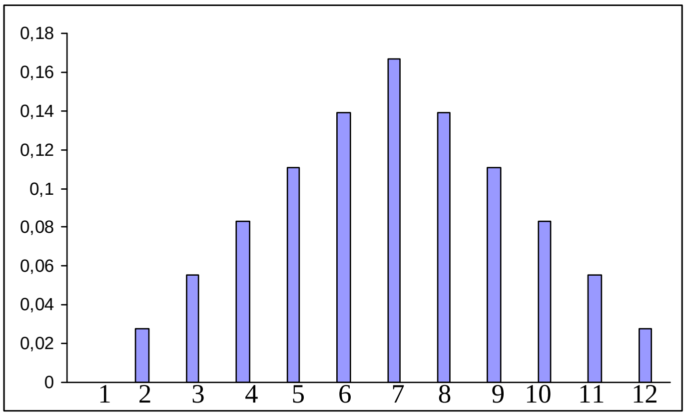
X	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

<u>La loi de probabilité</u> associée à X est la fonction, $f : x_i \rightarrow P(X = x_i) = p_i$

Les événements $(X = x_i)$ étant deux à deux incompatibles on a

$$\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \sum p_i = P(X = x_1) + P(X = x_2) + \ldots + P (X = x_n) = 1$$

<u>Représentation : diagrammes en bâtons</u>



3°) Fonction de répartition

On veut déterminer dans notre exemple $P(X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P (X = 4)= 1/6$

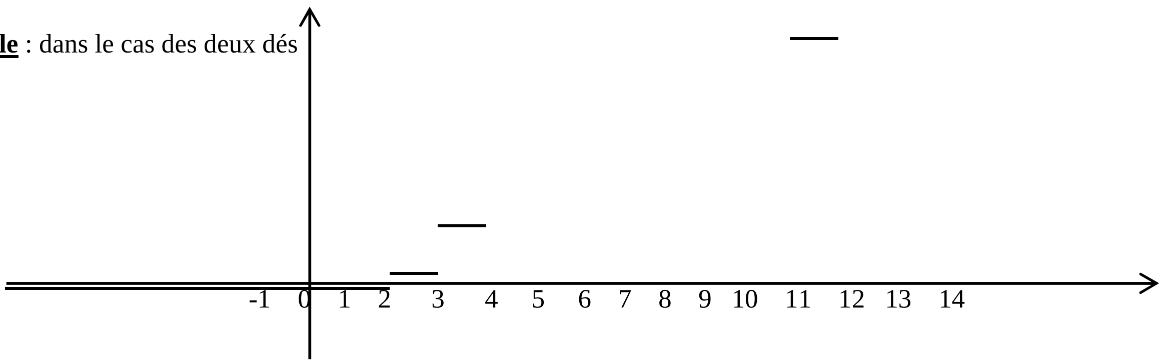
$P(X \leq 5) = P(X = 2) + P(X = 3) + P (X = 4)+ P(X = 5)=10/36$

Définition

La fonction définie sur R à valeurs dans [0 ;1] qui est telle que $f(x) = P(X \leq x)$ est appelé fonction de répartition de la variable aléatoire X.

<u>Remarque</u> : la représentation graphique est celle d'une fonction en escalier

<u>Exemple</u> : dans le cas des deux dés



Si x dans $] - \infty ; 2[$ $P(X \leq x) = 0$
Si x dans $[2 ; 3 [$ $P(X\leq x) = P(X = 2) = 1/36$
Si x dans $[3 ; 4 [$ $P(X\leq x) = P(X = 2) + P(X = 3) = 3/36$ ….
…
Si x dans $[12 ; + \infty[$ $P(X\leq x) = 1$

4°) Espérance mathématique, variance, écart – type

Définition de l'espérance mathématiques

Soit X une variable aléatoire telle que

X	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_n

Alors L'ESPERANCE MATHEMATIQUE de la loi de probabilité de X est

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$

Exemple : $E(X) = \frac{1}{36} \times 2 + \frac{2}{36} \times 3 + \ldots + \frac{1}{36} \times 12 = 7$

Remarque IMPORTANTE:
E(X) étant une moyenne dans le cas où nous sommes dans un jeu et que X est le gain possible a ce jeu, E(X) est alors le gain moyen **:**

Si E(X) > 0 le jeu sera avantageux (pour le joueur)
Si E(X) = 0 le jeu sera équitable (pour le joueur)
Si E(X)< 0 le jeu est désavantageux (pour le joueur)

Définition de la variance

Soit X une variable aléatoire telle que

X	x_1	x_2	…	x_n
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	…	p_3

Alors la variance est

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = p_1 (x_1 - E(X))^2 + p_2 (x_2 - E(X))^2 + \ldots + p_n (x_n - E(X))^2$$

ou

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 - (E(X))^2 = p_1 x_1^2 + p_2 x_2^2 + \ldots + p_n x_n^2 - (E(X))^2$$

L'écart – type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Exemple : Dans le cas des deux dés $V(X) \approx 5.83$ et $\sigma(X) \approx 2.41$
Exercice : Un joueur mise 100 € et lance deux fois de suite de façon indépendante un dé cubique non truqué.
Si l'écart des points entre les deux lancés est supérieur ou égal à 4 le joueur reçoit 250€
Si l'écart des points entre les deux lancés est égal à 2 ou à 3 le joueur reçoit 50€
Si l'écart des points entre les deux lancés est égal à 0 ou à 1 le joueur ne reçoit rien
Soit X la variable aléatoire égale au gain algébrique (càd qu'il peut – être négatif) du joueur à l'issue d'une partie.
1°) Donner le tableau de la loi de probabilité de X
2°) Déterminer E(X) ,conclusion.
3°) Donner V(X) et σ(X)

Corrigé

X	150	-50	-100
$P(X=x_i)$	1/6	7/18	4/9

$E(X) \approx -39$ € le jeu est désavantageux pour le joueur car il perd en moyenne 39 € par partie
$V(X) \approx 7654$ $\sigma(X) \approx 87.5$ €