FONCTION EXPONENTIELLE

Définition

La fonction exponentielle notée exp est **l'unique fonction définie et dérivable sur R** telle que

$$f' = f \quad \text{avec } f(0) = 1$$

exp(1) = e où e est un nombre réel (e ≈ 2,718…). **On note alors pour tout réel x, exp(x) = e^x**

Propriétés importantes

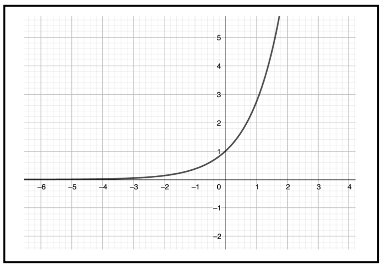
- e^x **est défini pour x de R**
- $e^x > 0$ **pour tout réel x**
- $e^0 = 1$ et $e^1 = e$
- $(e^x)' = e^x$

Règles de calculs => « cela fonctionne comme les puissances » Pour tous réels a et b on a

$$e^{a+b} = e^a \times e^b \qquad e^{-a} = \frac{1}{e^a} \qquad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \qquad (e^a)^n = e^{na} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

Exemple : $e^{2+3} = e^2 \times e^3$; $e^{-2} = \frac{1}{e^2}$; $e^{-1} = \frac{1}{e}$; $e^{2-4} = \frac{e^2}{e^4}$; $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$; $e^{2x} = (e^x)^2$; $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

Variations



x	- 1	0	1	2
$expx$	0.36	1	2.718	7.38

Limites à connaître

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

Conséquence graphique : l'axe des abscisses est asymptote horizontale d'équation y=0 à la courbe au voisinage de – ∞

Equations	**inéquations**
$e^a = e^b$ équivaut à a = b	$e^a \leq e^b$ équivaut à a ≤ b $e^a < e^b$ équivaut à $a < b$ $e^a \geq e^b$ équivaut à a ≥ b $e^a > e^b$ équivaut à $a > b$

(e^x)' = e^x Donc comme $e^x > 0$ pour tout x de R alors la fonction exp est strictement croissante sur R.

Tableau de variation

x	-∞ +∞
(exp)'	+
exp	0^+ ↗ +∞

Autres limites : Croissances comparées

Dem à connaître p62

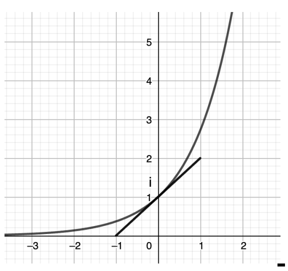
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \text{ pour tout n de N}$$

$$\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0 \text{ pour tout n de N}$$

Au voisinage de 0

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

Tangente au point d'abscisse 0 càd A(0 ;1)



T : y = x + 1

Dérivation

Soit U une fonction définie et dérivable sur un intervalle I de R alors e^U est dérivable sur I et

$$(e^U)' = U' e^U$$

Exemples : $(e^{2x})' = 2 e^{2x}$ $(e^{-x})' = -e^{-x}$ $(e^{x^2})' = 2x\, e^{x^2}$

soit a une constante réelle

$(e^{ax})' = a\, e^{ax}$ $(e^{-ax})' = -a\, e^{-ax}$