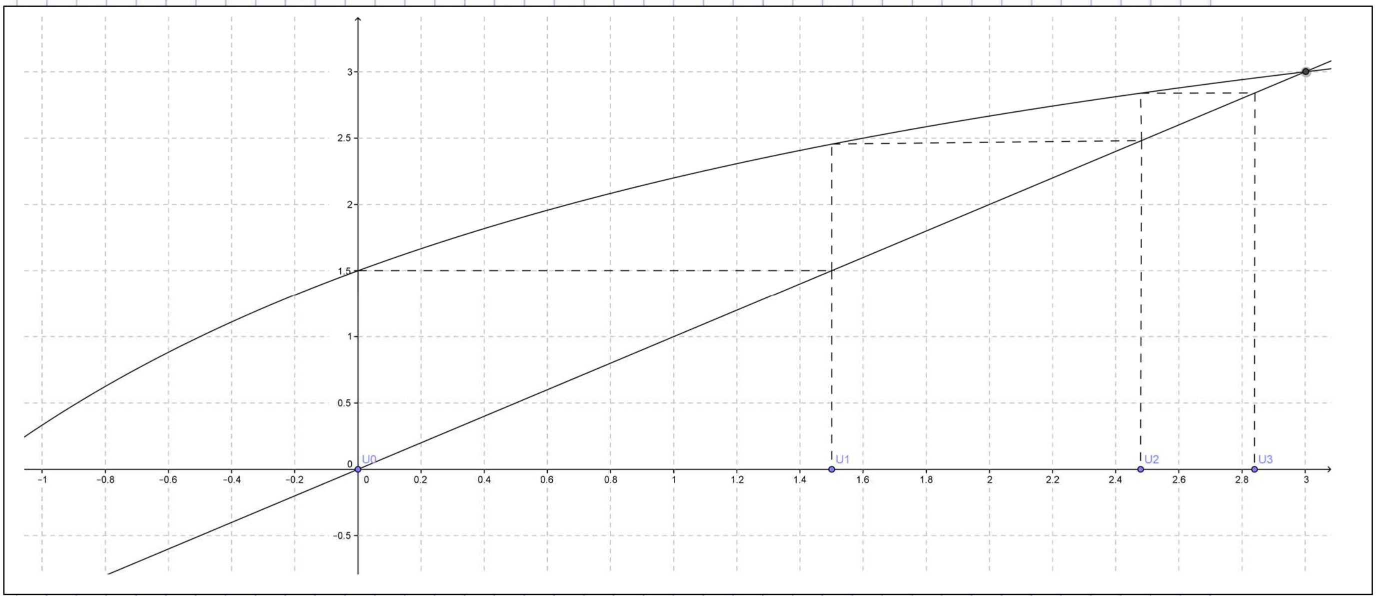
CORRECTION DU DM N°2 TS2

Ex 1



Le graphique suggère que la suite (U_n) converge vers 3

2°) a) Pour tout entier naturel n

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}+2}{U_{n+1}-3} = \frac{\frac{5U_n+6}{U_n+4}+2}{\frac{5U_n+6}{U_n+4}-3}$$

$$V_{n+1} = \frac{\frac{5U_n+6+2U_n+8}{U_n+4}}{\frac{5U_n+6-3U_n-12}{U_n+4}} = \frac{7U_n+14}{2U_n-6}$$

$$V_{n+1} = \frac{7(U_n+2)}{2(U_n-3)} = \frac{7}{2}\cdot V_n$$

On en déduit que la suite (V_n) est géométrique de

Raison $\frac{7}{2}$ et de premier terme $V_0 = \frac{-2}{3}$

On en déduit l'écriture de V_n :

$$V_n = -\frac{2}{3}\times\left(\frac{7}{2}\right)^n.$$

b) $V_n = \dfrac{U_n + 2}{U_n - 3}$ soit $V_n(U_n - 3) = U_n + 2$

$$V_n U_n - 3V_n = U_n + 2$$

$$V_n U_n - U_n = 2 + 3V_n$$

$$U_n(V_n - 1) = 2 + 3V_n$$

$$\boxed{U_n = \frac{3V_n + 2}{V_n - 1}}$$

On en déduit que

$$U_n = \frac{-2\left(\frac{7}{2}\right)^n + 2}{-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{7}{2}\right)^n - 1} = 2\cdot\frac{\left(\frac{7}{2}\right)^n - 1}{+\frac{2}{3}\left(\frac{7}{2}\right)^n + 1}$$

c)

$$U_n = 2\times\frac{\cancel{\left(\frac{7}{2}\right)^n}\left[1 - \left(\frac{2}{7}\right)^n\right]}{\cancel{\left(\frac{7}{2}\right)^n}\left[\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{7}\right)^n\right]}$$

$$U_n = 2\times\frac{1 - \left(\frac{2}{7}\right)^n}{\frac{2}{3} + \left(\frac{2}{7}\right)^n}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 3$.

EX 2

On utilise le théorème des gendarmes en remarquant que comme $n \geq 1$

Alors pout tout entier p tel que $1 \leq p \leq n$ on a donc

$$n^2 + 1 \leq n^2 + p \leq n^2 + n$$

soit en passant à **<u>l'inverse</u>** :

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n^2 + n}} \leq \frac{1}{n^2 + p} \leq \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n^2 + 1}}$$

puis en multipliant par n (qui est positif donc pas de problème)

$$\frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + p} \leq \frac{n}{n^2 + 1}$$

On effectue enfin la somme quand p varie de 1 à n on obtient

$$\underbrace{\frac{n}{n^2+n} + \frac{n}{n^2+n} + \dots + \frac{n}{n^2+n}}_{\text{on additionne n fois même quantité}} \leq \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n} \leq \underbrace{\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+1} + \dots + \frac{n}{n^2+1}}_{\text{on additionne n fois la la même quantité}}$$

C'est aussi

$$\sum_{P=1}^{n} \frac{n}{n^2+n}$$

Les termes de la somme ne dépendent pas de p !

C'est aussi

$$\sum_{P=1}^{n} \frac{n}{n^2+1}$$

Les termes de la somme ne dépendent pas de p !

$$n \times \frac{n}{n^2 + n} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{n^2 + p} \leq n \times \frac{n}{n^2 + 1}$$

$$\frac{n^2}{n^2 + n} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{n}{n^2 + p} \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

Puis en passant à la limite comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2 + n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{1 + 1/n} = 1$ et de même $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1$ donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} V_n = 1}$$

Ex 3

1°) On considère un réel $\epsilon > 0$ quelconque.
$| U_n - 3 | < \epsilon$ équivaut à $| \frac{-10}{n+4} | < \epsilon$ soit encore à $\frac{10}{n+4} < \epsilon$
Soit $n > \frac{10}{\epsilon} - 4$. On pose $N = E(\frac{10}{\epsilon} - 4) + 1$ où E est la fonction partie entière .

Alors pour tout $n \geq N$ on a $| U_n - 3 | < \epsilon$

Pour tout réel x si $E(x) = n$ où n l'unique entier relatif vérifiant

$$n \leq x < n+1$$

exemple E(2, 34) = 2 mais attention E(-1, 245) = -2 , la partie entière n'est pas la troncature !

On trouve $n > 10000-4$ soit $n > 9996$ on prend $N = 9997$.

2°) Si $A < 0$ il est clair que pour tout $n \geq 0$, $V_n > A$.
Si $A \geq 0$ alors $\sqrt{n} > A$ équivaut à $n > A^2$. On pose $N = E(A^2) + 1$. et si $n \geq N$ alors $V_n > A$.
Donc la suite diverge vers $+\infty$ Puisque quelque soit le réel A il existe un rang N à partir duquel $V_n > A$.