DEVOIR MAISON N° 1 19/09/2014 TS2

CORRECTION DETAILLEE

Exercice 1

1°) $\dfrac{2x^2+x-1}{x^2+1} \leq 1.$

Comme $x^2 + 1 > 0$ pour tout réel x, l'inéquation est définie sur R.

De plus l'inéquation donnée équivaut à :

$\dfrac{2x^2+x-1}{x^2+1} - 1 \leq 0$ càd à

$\dfrac{2x^2+x-1-x^2-1}{x^2+1} \leq 0$ soit encore à

$\dfrac{x^2+x-2}{x^2+1} \leq 0$. Comme $x^2+1>0$ pour tout réel x, on en déduit que $\dfrac{x^2+x-2}{x^2+1}$ est du signe de x^2+x-2. Or x^2+x-2 est un trinôme dont 1 est une racine évidente et -2 est l'autre racine. D'après la règle sur le signe du trinôme on en déduit la solution de l'inéquation initiale

$$S = [-2\,;1].$$

2°) $x^3 - 4x^2 - x + 4 = x^2(x-4) - (x-4) = (x^2-1)(x-4)$

L'inéquation donnée équivaut donc à $(x^2-1)(x-4) > 0$

x	$-\infty$		-1		1		4		$+\infty$
x^2-1		+	0	−	0	+		+	
$x-4$		−		−		−	0	+	
$(x^2-1)(x-4)$		−	0	+	0	−	0	+	

S =]-1 ;1[U]4 ;+∞[

Ex 2

1) a) $\Delta = 24^2$ donc $x_1 = -18$ et $x_2 = 6$.

Avec l'algorithme : $6 \to 36 \to 144 \to 12 \to 6 = x_2$

b) $8 \to 64 \to 144 \to 12 \to 4$.

$\Delta = 24^2$ $x_1 = -20$ et $x_2 = 4$.

2) a) $x^2 + bx - c = 0$ a pour discriminant $\Delta = b^2 + 4c$ donc si $c > 0$ $\Delta > 0$ et l'équation donnée admet 2 racines.

b) x_1 reçoit $-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$

car $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2+4c}}{2a} = -\frac{b}{2} + \frac{2}{2}\sqrt{\frac{b^2}{4}+c}$

$x_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4}+c}$

Ex 3

1°) a) $f(0) = 0$; $f'(-1) = 0$; $f'(0) = 0$; $f'(3) = 12$

$f'(2) = 0$

b) $f'(x) < 0$: $S =]-\infty ; -1[\cup]0 ; 2[$

2°) f_2

3°) $f_2'(x) = x^3 - x^2 - 2x$

$f_2'(-2) = -8$ d'où l'équation réduite de la tangente en -2 $y = -8x - \frac{40}{3}$

4°) Pour déterminer les abscisses des points où la tangente à la courbe est parallèle à la droite d'équation $y = -2x$ on doit résoudre

$$f'(x) = -2 \quad \text{càd} \quad x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0$$

soit $x^2(x-1) - 2(x-1) = 0$ ce qui donne

$(x^2-2)(x-1) = 0$ soit finalement.

$x = -\sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = 1$

Les points cherchés sont donc les suivants :

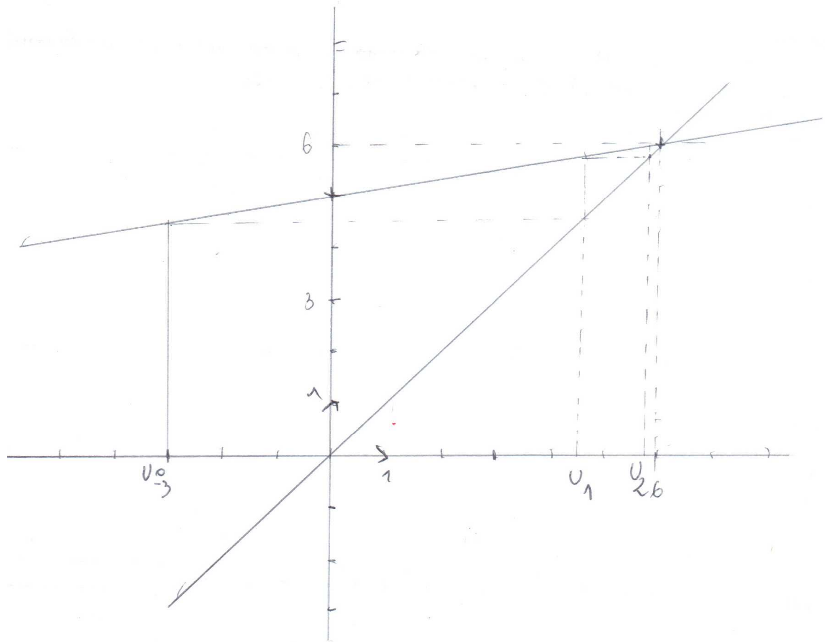
$A\left(-\sqrt{2}\,;\, f(-\sqrt{2})\right)$ $B\left(\sqrt{2}\,;\, f(\sqrt{2})\right)$ et $C\left(1\,;\, f(1)\right)$

càd $A\left(-\sqrt{2}\,;\, -1 + \frac{2}{3}\sqrt{2}\right)$ $B\left(\sqrt{2}\,;\, -1 - \frac{2}{3}\sqrt{2}\right)$ et $C\left(1\,;\, -\frac{13}{12}\right)$

EX 4

1) $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = \frac{1}{6} U_n + 5 \end{cases}$

b) On constate que les valeurs de U_n se rapprochent de plus en plus de 6 .



a. $V_{n+1} = U_{n+1} - 6 = \frac{1}{6} U_n + 5 - 6 = \frac{1}{6} U_n - 1 = \frac{1}{6}(U_n - 6) =$

b. (V_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $V_0 = -9$.

c. $V_n = -9\left(\frac{1}{6}\right)^n$ d'où $U_n = -9\left(\frac{1}{6}\right)^n + 6$.

Rq : on peut montrer alors que

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 6$!

Exercice 5

1) On démontre à l'aide de deux implications : dans le « sens direct => » puis dans « l'autre <= »

a et b sont des nombres positifs.
Démontrons l'équivalence :

(P) : « $a < b$ » équivaut à (Q) : « $a^2 < b^2$ ».

- **Supposons que (P) est vraie :** $a < b$.

(Q) : « $a^2 < b^2$ » équivaut à (Q') : « $(a + b)(a - b) < 0$ ».
a et b sont positifs ; ainsi $a + b > 0$.
$a < b$ soit $a - b < 0$, donc $(a + b)(a - b) < 0$.
Ainsi (P) $\Rightarrow$ (Q') est vraie.
Donc (P) $\Rightarrow$ (Q) est vraie.

- **Supposons que (Q) est vraie :** $a^2 < b^2$.

Alors $(a + b)(a - b) < 0$.
a et b sont positifs ainsi $a + b > 0$.
Comme $(a + b)(a - b) < 0$, on a donc $a - b < 0$, soit $a < b$.

Remarque : on utilise AxB < 0 équivaut à A et B de signe contraire

Donc (Q) $\Rightarrow$ (P) est vraie.

- **Conclusion :** (P) $\Rightarrow$ (Q) et (Q) $\Rightarrow$ (P) donc (P) $\Leftrightarrow$ (Q).

2) On démontre par équivalences successives

Démontrons que (P) : « $a^2 = b^2$ » équivaut à (Q) : « $a = b$ ou $a = -b$ ».
(P) équivaut à (P_1) : « $a^2 - b^2 = 0$ » et (P_1) équivaut à (P_2) : « $(a + b)(a - b) = 0$ ».
Enfin (P_2) équivaut à (Q) : « $a = -b$ ou $a = b$ ».
Ainsi (P) $\Leftrightarrow$ (P_1) $\Leftrightarrow$ (P_2) $\Leftrightarrow$ (Q).