DEVOIR MAISON N°3 TS2 A REMETTRE LE 03/11/14

EXERCICE1

Pour tout x réel, on pose :

$$f(x) = \begin{cases} -2x^2 - 2x + 4, & \text{si } x \leqslant -1 \\ 2x + c, & \text{si } x > -1, \end{cases}$$

où c est une constante réelle.

Déterminer la valeur de la constante c de sorte que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$, puis tracer la représentation graphique associée.

EXERCICE 2

Avec une fonction auxiliaire

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}.$$

On nomme $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A. Étude d'une fonction auxiliaire

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 4$.

1. Étudier les limites de la fonction g, en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution réelle.

4. En donner une approximation, à l'aide de la calculatrice, à 10^{-3} près.

5. En déduire le signe de la fonction g.

Partie B. Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition D, à déterminer.

2. Montrer que, pour tout $x \in D$, $f'(x) = \dfrac{xg(x)}{(x^2-1)^2}$.

En déduire le tableau de variations de la fonction f.

3. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est asymptote à $\mathscr{C}$, puis étudier la position relative de ces deux courbes.

4. Représenter $\mathscr{C}$ et Δ.

EXERCICE 3

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ on note A et B points d'affixes respectives $2i$ et $1 + i$.

1. Soit z un nombre complexe différent de $1 + i$, écrit sous la forme $z = x + iy$, où x et y sont des nombres réels. Calculer, en fonction de x et de y, la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $Z = \dfrac{z - 2i}{z - 1 - i}$.
2. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixes z tels que Z soit un réel et l'ensemble (F) points M d'affixes z tels que Z soit un imaginaire pur.