DEVOIR MAISON N°2 TS

A REMETTRE LE 28/09/2015

Exercice 1 (16 points)

Soit f la fonction définie sur l'intervalle I = [-1 ; 3] par $f(x) = \dfrac{5x + 6}{x + 4}$.

On définit pour tout entier naturel n la suite (U_n) par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

On admet que pour tout entier n, U_n est dans I.

1°) Représenter la courbe de f dans un repère orthogonal d'unité 4 cm en abscisses et 2 cm en ordonnées.

A l'aide de la courbe déterminer **graphiquement** les 4 premiers termes de (U_n).

Que suggère le graphique sur la convergence de (U_n) ?

2°) On considère la suite (V_n) définie sur N par $V_n = \dfrac{U_n + 2}{U_n - 3}$

a) Déterminer la nature de la suite (V_n). En déduire l'expression de V_n en fonction de n.
b) Exprimer alors U_n en fonction de V_n puis de n.
c) En déduire la convergence de la suite (U_n) et sa limite ℓ.

Exercice 2 (4 points)***

Donner la limite de (V_n) où $V_n = \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+2} + \dfrac{n}{n^2+3} + \dots + \dfrac{n}{n^2+n}$ avec $n \geq 1$

AIDE : on pourra calculer V_1, V_2 et V_3 puis montrer que

$$\frac{n}{n^2 + n} \leq \frac{n}{n^2 + p} \leq \frac{n}{n^2 + 1}$$ pour tout entier naturel p tel que $1 \leq p \leq n$

Exercice 3 pour les chercheurs (BONUS + 2)

1°) Démontrer **à l'aide de la définition** que la suite (U_n) définie sur N par $U_n = \frac{3n+2}{n+4}$ a pour limite 3 et

Déterminer le rang N à partir duquel $|U_n - 3| < 0{,}001$.

2°) Démontrer **à l'aide de la définition** que la suite $V_n = \sqrt{n}$ diverge vers $+\infty$.

Remarque : voir page 19 du livre.