FONCTIONS
FICHE 3 : DERIVATION ET CONVEXITE

I)Nombre dérivé

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. *a* un élément de I. h est un réel quelconque tel que a + h dans I

f est DERIVABLE en a si et seulement si f vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes

1. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=l$ où l est un réel
2. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=l$ où l est un réel
3. $f(a+h)=f(a)+h.l+h\,\varphi(h)$ où $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$

Le réel *l* trouvé ci – dessus est le nombre dérivé de f en a noté f ' (a)

Applications :

a)Utilisation pour calculer une limite

Déterminer la limite en 0 des fonctions f(x)= $\frac{e^x-1}{x}$: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x-0}=1$

b) Prouver la dérivabilité d'une fonction en un point

On considère la fonction f définie sur [0 ; + ∞[par f(x) = $x\sqrt{x}$. Montrer que f est dérivable en 0.

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}=0$ donc f est dérivable en 0 et f '(0) = 0.

c) Dérivabilité et continuité

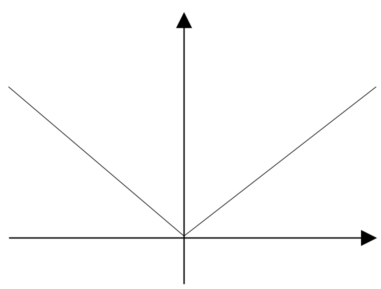
Si une fonction est DERIVABLE sur un intervalle I alors elle est CONTINUE sur I .

ATTENTION la réciproque est fausse

Démonstration :soit a dans I.Si f dérivable en a alors $f(a+h)=f(a)+h.f'(a)+h\,\varphi(h)$ où $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$ donc $\lim\limits_{h\to 0}f(a+h)=f(a)$ càd $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$ et f est continue en a .

Contre – ex : Soit f la fonction définie sur R par f (x) = $|x|$

f est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0



II) Fonction dérivée

Définition :

Une fonction f dérivable en tout point d'un intervalle I est dérivable sur I.On note f ' la fonction dérivée de f sur I.

1°) *Formulaires des fonctions usuelles*

f désigne une *f*onction dé*f*inie et dérivable sur un intervalle I .

f	D*f*	*f'*	D *f'*
a	R	0	R
x	R	1	R
ax + b	R	a	R
x^2	R	2x	R
x^3	R	3x^3	R
x^n n∈N*	R	nx^{n-1}	R
$\frac{1}{x}$	R*	$-\frac{1}{x^2}$	R*
$\frac{1}{x^2}$	R*	$-\frac{2}{x^3}$	R*
$\frac{1}{x^n}$ n∈N*	R*	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	R*
$\sqrt{x}$	R^+	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	R^{+*}
e^x	R	e^x	R
ln x	R*+	$\frac{1}{x}$	R*+
cos$x$	R	-sin$x$	R
sin$x$	R	cos$x$	R
tanx	R\{ (2k+1)π/2}	1 + tan2x	R\{ (2k+1)π/2}

2°) Opérations sur les fonctions dérivables :rappel des formules usuelles complément sur la dérivation.

Dans ce paragraphe les fonctions u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

OPERATIONS	EXEMPLES : Dans chaque cas calculer la dérivée de la fonction
Somme $(U + V)' = U' + V'$	$f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ $\quad f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$ $\quad x \neq 0$
Produit par un réel $(aU)' = aU'$	$f(x) = 5x^6$ $\quad f'(x) = 30\ x^5$
Produit $(UV)' = U'V + UV'$	$f(x) = x^6 \times (2x^5 + 1)$ **Méthode** : $U(x) = x^6$ $\quad U'(x) = 6x^5$ $V(x) = 2x^5 + 1$ $\quad V'(x) = 10x^4$ $f'(x) = 6x^5 \times (2x^5 + 1) + x^6 \times (10x^4) = 22x^{10} + 6x^5$
Carré $(U^2)' = 2 \times U' \times U$	$f(x) = (x^4 + 3x)^2$: $\quad U(x) = x^4 + 3x$ $\quad U'(x) = 4x^3 + 3$ $f'(x) = 2 \times (4x^3 + 3) \times (x^4 + 3x)$
Puissance entière $(U^n)' = n \times U' \times U^{n-1}$ $\quad n \in \mathbb{N}^*$	$f(x) = (x^2 + 3x + 4)^3$: $U(x) = x^2 + 3x + 4$ $\quad U'(x) = 2x + 3$ $f'(x) = 3(2x + 3)(x^2 + 3x + 4)^2$
Inverse $(U \neq 0$ sur I$)$ $\left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{U'}{U^2}$	$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$: $U(x) = x^2 + 1$ $\quad U'(x) = 2x$ $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$
Quotient $(V \neq 0)$ $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U' \times V - U \times V'}{V^2}$	$f(x) = \frac{3x+1}{x^2+2}$ $\quad$ **Méthode** : $U(x) = 3x + 1$ $\quad U'(x) = 3$ $V(x) = x^2 + 2$ $\quad V'(x) = 2x$ $f'(x) = \frac{3(x^2+2) - (3x+1)(2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{-3x^2 - 2x + 6}{(x^2+2)^2}$
$(U \neq 0)$ $\left(\frac{1}{U^n}\right)' = -n \times \frac{U'}{U^{n+1}}$	$f(x) = \frac{1}{(x^4+2)^5}$: $U(x) = x^4 + 2$ $\quad U'(x) = 4x^3$ $\quad f'(x) = \frac{-5 \times 4x^3}{(x^4+2)^6} = \frac{-20x^3}{(x^4+2)^6}$
Racine carrée $(U>0)$ $(\sqrt{U})' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$	$f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$: $U(x) = x^2 + x + 1$ $\quad U'(x) = 2x + 1$ $f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$
COMPOSEE $f(x) = (g \circ u)(x)$ $f'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$	$(e^U)' = U' \times e^U$ $U(x) = x^2 + 3x + 4$ $\quad U'(x) = 2x + 3$ $f(x) = e^{x^2+3x+4}$ $f'(x) = (2x + 3)\, e^{x^2+3x+4}$

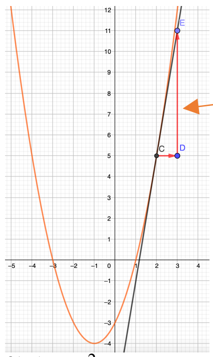
III)Tangente à une courbe et nombre dérivé

Soit f une $f$onction dérivable sur un intervalle I et a un élément de I.C est la courbe de f dans un repère (O ; i , j) . f ' est la $f$onction dérivée de f sur I .

L'équation réduite de la tangente à C au point A d'abscisse a c'est - à - dire au point de coordonnées (a ; f(a)) est

$$\boxed{y = f'(a) \times (x - a) + f(a)}$$

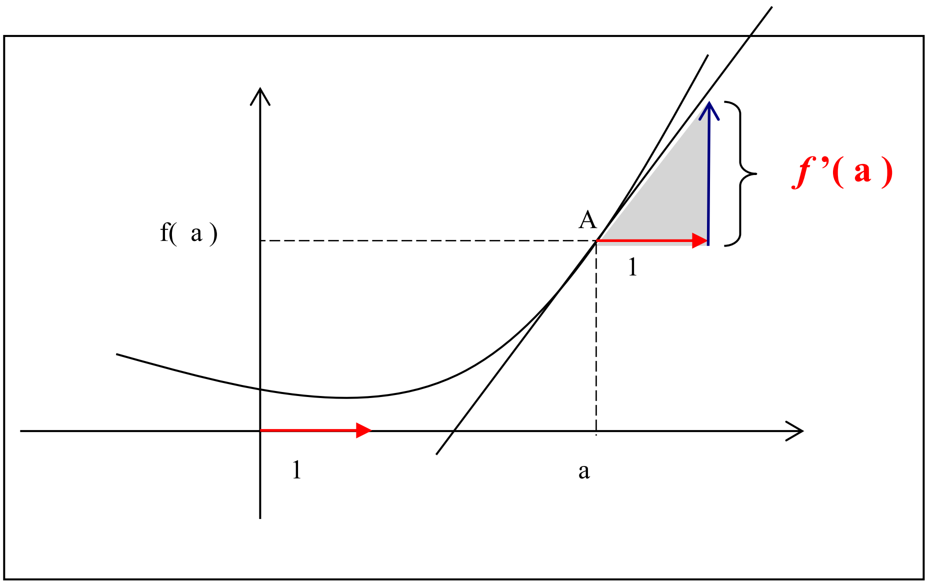
le nombre dérivé de f en a,
f'(a)
est le coefficient directeur de la tangente
à C au point d'abscisse a



Coefficient directeur de la tangente est $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6$:
y=6(x – 2) + 5
y=6x – 7
donc
f '(2) = 6

f(x) = x^2 +2x – 3
f '(x) = 2 x + 2 donne bien f '(2) =6

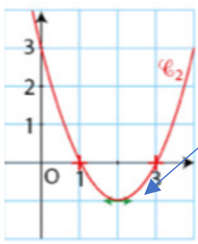
ATTENTION beaucoup d'exercices de bac utilisent cette formule , elle est à savoir parfaitement



Remarques :
Une équation de la tangente au point **d'abscisse 0**, s'écrit **y = f '(0) x + f(0)**

b) Cas particulier important : tangente horizontale

La tangente à la courbe en un point d'abscisse a est **horizontale** ssi **f '(a) = 0**

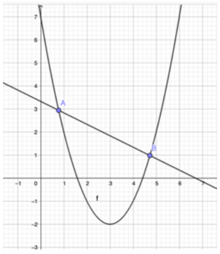


IV) Convexité et sens de variation de f ’

1°) Définition

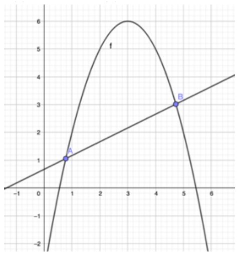
Soit deux points A et B d’une courbe Cf. **La droite (AB) est appelée sécante à Cf**.

Lorsque la courbe est **en-dessous** de ses sécantes sur un intervalle I, elle est **convexe** sur I



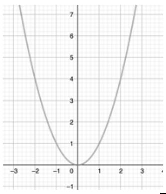
CONVEXE => EN CREUX

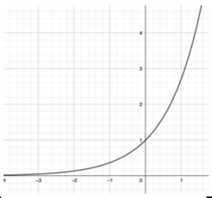
Lorsque la courbe est **au-dessus** de ses sécantes sur un intervalle I , elle est **concave** sur I



CONCAVE => EN BOSSE

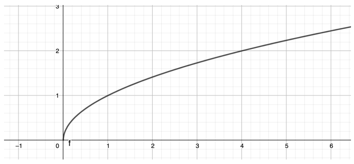
Exemples : La fonction carrée ou exponentielle

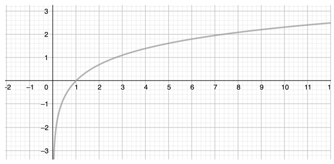




Mémo-tech : fonction con**vexe** => **ex**ponentielle

La fonction racine ou ln

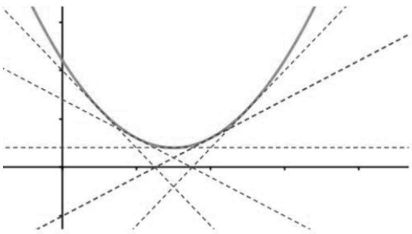




Propriété admise

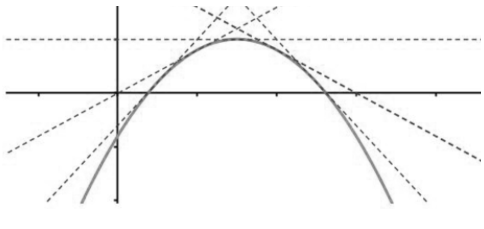
f est une fonction dérivable sur un intervalle I et C est sa courbe représentative.

f est convexe sur I ssi
sa courbe C est entièrement
au-dessus de ses tangentes sur I.



fonction convexe

f est concave sur I ssi
sa courbe C est entièrement
en-dessous de ses tangentes sur I.



fonction concave

Application=> savoir lire la convexité d’une fonction sur sa courbe représentative METHODE 5 p 145

3°) Théorème (admis)

Si f est dérivable sur un intervalle I alors :

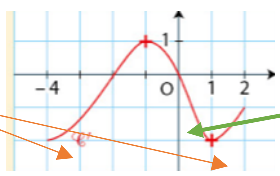
f est **convexe sur I** ssi
f ’ est croissante sur I.

f est **concave sur I** ssi
f ’ est décroissante sur I.

Exemple :

Voici la courbe de la dérivée f ’ d’un fonction dérivable f sur $[-4; 2]$

f est convexe sur $[-4; -1]$ et $[1; 2]$ car sa dérivée est croissante sur $[-4; -1]$ et $[1; 2]$



f est concave sur $[-1; 1]$car sa dérivée est décroissante sur $[-1; 1]$

Application=> savoir lire la convexité d’une fonction sur la courbe de sa dérivée ou des variations de f ’ . METHODE 7 p 147

4°) Convexité et signe de la dérivée seconde f ''

a) Dérivées successives

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Sa fonction dérivée f ' est appelée fonction dérivée première ou d'ordre 1 de f.
Lorsque f ' est dérivable sur I, sa fonction dérivée est notée f '' et est appelée dérivée seconde de f.
Par itération, pour tout entier naturel n ≥ 2, on définit la dérivée n-ième de f comme étant la dérivée de la fonction dérivée d'ordre n – 1: $\mathbf{f^{(n)} = (f^{(n-1)})'}$.

Exemple : $f(x)= x^3$ avec $x \in$ R. Calculer la dérivée seconde de f et sa dérivée 3-iéme.

$f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$ $f^{(3)}(x) = 6$

b) Théorème admis

Si f est deux fois dérivable sur un intervalle I alors :

f est convexe sur I ssi f '' ≥ 0 sur I

f est concave sur I ssi f '' ≤ 0 sur I

⇨ **Savoir-faire** : **Étudier la convexité d'une fonction à l'aide du signe de la dérivée seconde**
METHODE 8 P 147

c) Point d'inflexion

Défintion
f est une fonction dérivable sur un intervalle I. C est sa courbe représentative et a un élément de I.

Le point A(a ; f(a)) est un point d'inflexion si la courbe C traverse sa tangente en A.

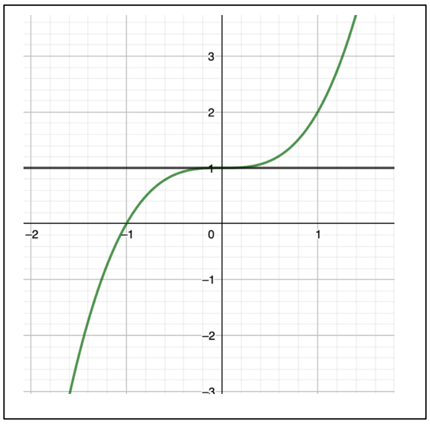
CONSEQUENCES :

- Une fonction qui change de convexité en un point alors ce point est un point d'inflexion.
- Si f ''(x) s'annule en a en changeant de signe alors la courbe de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse a.

Exemple : f(x) = x^3 f '(x) = $3x^2$ f ''(x) = $6x$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f '' (x)		-	0	+	

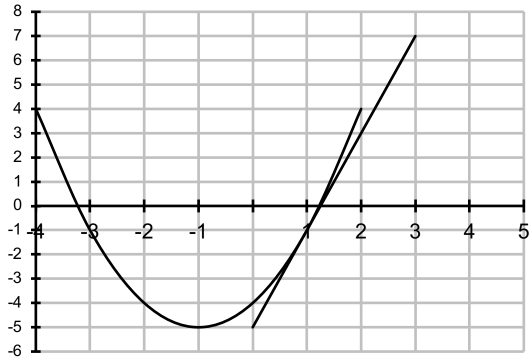
f est concave sur R- est convexe su R+ ,
sa courbe C admet le point O comme point d'inflexion.



TANGENTES : EXERCICES TYPES CORRIGES

Ex 1

On a représenté graphiquement la fonction f définie sur [-4 ; 2] par f(x)= $x^2 + 2x - 4$ .On note C la courbe obtenue.
1°) Calculer la dérivée f ' de f.
2°) Montrer qu'une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1 est y = 4x - 5 .
3°) Tracer T .

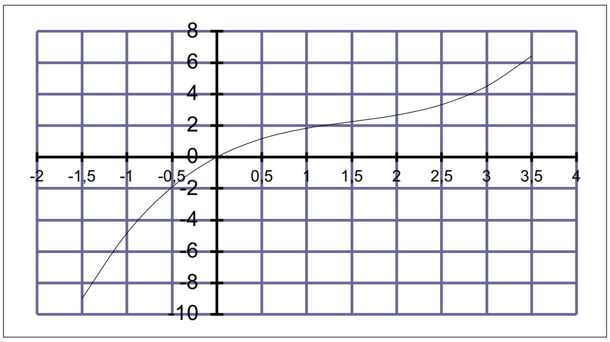


1°) f '(x)= 2x + 2
2°) Equation de la tangente T au point d'abscisse 1 :

y = f '(1)(x - 1) + f(1)
soit y = 4 (x - 1) - 1 Soit encore y = 4x - 5

Exercice 2

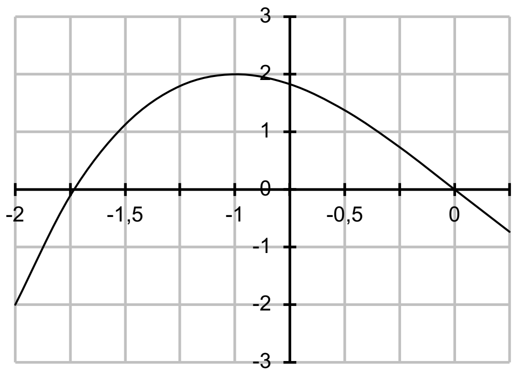
Soit la fonction f définie sur [-2 ; 4] par
f(x)= x^3 /3- 1.5.x^2+3x. On note C sa courbe ci-contre .
1°) Calculer la dérivée f' de f.
2°) Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.
3°) Tracer T .
4°) Déterminer une équation de la tangente à C aux points de la courbe où elle est parallèle à la droite d'équation y = x + 1 .



Corrigé : 1°) f '(x) = $x^2 - 3x + 3$ 2°) y = f '(0) x + f(0) soit y = 3x
4°) On cherche les points dont l'abscisse vérifie l'équation f '(x) = 1 c'est – à – dire $x^2 - 3x + 2 = 0$
1 est solution évidente l'autre solution est 2 ; les points cherchés sont les points A(1, 11/6) et B(2 ; 8/3)
Equation réduite de la tangente T_A : y = x + 5/6 de la tangente T_B :y = x + 2/3

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur [-2 ; ¼] par f (x) = $x^3 - 3x$
dont la courbe C est donnée ci-contre.
1°) Tracer la tangente à C au point d'abscisse -1.
Quel est sa particularité ?
2°) Donner une équation de la tangente T à C au point O.
puis étudier algébriquement la position relative de C et T.

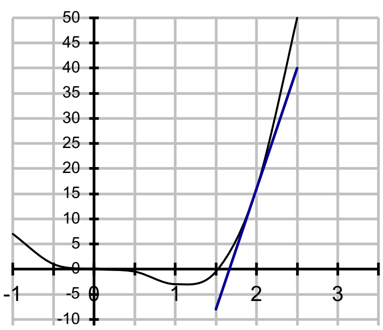


Corrigé : 1°) f'(- 1) = 0 la tangente est donc HORIZONTALE au point d'abscisse -1 .
2°) y = -3x On doit donc étudier le signe de f(x) - (- 3x) = x^3 On en déduit que C est au dessus de T si x>0 et en dessous si x< 0.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur [-2 ;2]
dont la courbe C est donnée ci-contre.

1°) Déterminer le nombre dérivé de f en 2.
2°) Donner une équation de la tangente à C au point d'abscisse 2.



Corrigé : 1°) f ' (2) = + 25/+0.5 = 50
Car f '(2) est le COEFFICIENT DIRECTEUR DE LA TANGENTE AU POINT D'ABSCISSE 2.
2°) y = 50 x - 8 5

EXERCICES TYPE CONVEXITE

SAVOIR LIRE LA COURBE D’UNE FONCTION f

Reconnaître graphiquement la convexité

Voici, dans un repère, la courbe $\mathscr{C}$ représentative d’une fonction f dérivable sur l’intervalle $[-1\,;10]$.
Lire graphiquement les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave.

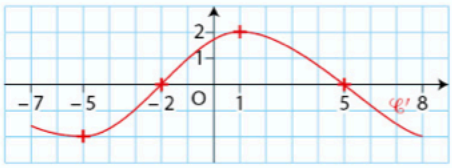
tion

- La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessous de ses tangentes sur les intervalles $[-1\,;3]$ et $[8\,;10]$. La fonction f est donc concave sur chacun de ces intervalles.
- La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de ses tangentes sur l’intervalle $[3\,;8]$. La fonction f est donc convexe sur cet intervalle.

Intuitivement, une fonction convexe sur un intervalle est représentée par un « creux », alors qu’une fonction concave est représentée par une « bosse ».

SAVOIR LIRE LA COURBE DE LA DERIVEE DE LA FONCTION

f est une fonction dérivable sur l’intervalle $[-7\,;8]$.
Voici la courbe représentative de sa fonction dérivée f'.
Lire graphiquement les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave ainsi que les points d’inflexion de la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère.



ion

- On observe que la fonction dérivée f' est décroissante sur chacun des intervalles $[-7\,;-5]$ et $[1\,;8]$. La fonction f est donc concave sur ces intervalles.
- D’autre part, la fonction dérivée f' est croissante sur l’intervalle $[-5\,;1]$, donc la fonction f est convexe sur cet intervalle.
- La courbe $\mathscr{C}$ admet donc deux points d’inflexion, d’abscisses -5 et 1.

SAVOIR UTILISER LE SUGNE DE LA DERIVEE SECONDE DE LA FONCTION

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$. $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère.

a) Déterminer la fonction dérivée seconde de la fonction f.
b) Étudier le signe de $f''(x)$ selon les valeurs de x.
c) En déduire les intervalles sur lesquels la fonction f est convexe ou concave.

olution

a) Pour tout réel x, $f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (x+1)e^x$,
$f''(x) = 1 \times e^x + (x+1)e^x = (x+2)e^x$.

b) Pour tout réel x, $e^x > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $x + 2$.
D’où le tableau de signes ci-contre.

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

Pour déterminer f'' :
– on détermine d’abord la fonction dérivée f',
– ensuite on dérive f'.

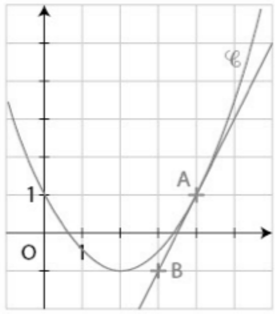
c) Sur $]-\infty\,;-2]$, $f''(x) \leqslant 0$ donc f est concave. Sur $[-2\,;+\infty[$, $f''(x) \geqslant 0$ donc f est convexe.
La dérivée seconde s’annule en -2 en changeant de signe, donc $\mathscr{C}$ admet le point $A(-2\,;-2e^{-2})$ pour point d’inflexion.

SAVOIR UTILISER LA CONVEXITE POUR ETUDIER LA POSITION RELATIVE D'UNE COURBE ET D'UNE DE SES TANGENTES

Voici dans un repère, la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1\,;6]$ par :

$f(x) = 0{,}5(x-2)^2 - 1$.

La tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point A$(4\,;1)$ passe par le point B$(3\,;-1)$.



a) Lire graphiquement la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-1\,;6]$.

b) Déterminer une équation de la tangente T.

c) En déduire que pour tout réel x de l'intervalle $[-1\,;6]$:

$$(x-2)^2 \geqslant 4x - 12.$$

Corrigé

a) La foncion f est convexe sur l'intervalle $[-1\,;6]$.

b) Une équation de T est :

$y = f'(4)(x-4) + f(4)$

Or $f'(4) = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1-1}{3-4} = 2$ et $f(4) = 1$.

Une équation de T est donc $y = 2x - 7$

c) La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-1\,;6]$, $\mathcal{C}$ est donc au-dessus de ses tangentes sur l'intervalle $[-1\,;6]$.

Ainsi pour tout réel x de l'intervalle $[-1\,;6]$

$f(x) \geqslant 2x - 7$ c'est-à-dire $0{,}5(x-2)^2 - 1 \geqslant 2x - 7$

$0{,}5(x-2)^2 \geqslant 2x - 6$ et $(x-2)^2 \geqslant 4x - 12$.