DM N°3 TS2 03/11/15 CORRIGE

EX 1

1°) Le trinôme $9x^2+6x+5$ est strictement positif pour tout réel x puisque $\Delta = -144$ et d'après la règle sur le signe du trinôme. On a donc bien f définie sur $\mathbb{R}$.

2°)

$$f(x) = x^2\left(9 + \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}\right)$$

Donc :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

et

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(9 + \frac{6}{x} + \frac{5}{x^2}\right) = 9$

car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

d'où par produit

$\lim\limits_{x\to+\infty} 9x^2 + 6x + 5 = +\infty$

de plus $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc d'après le théorème de composition des limites

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

On montre de même que

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

3°) . Pour tout réel h si $-\frac{1}{3}+h \in \mathbb{R}$ alors $-\frac{1}{3}-h \in \mathbb{R}$.

De plus grâce à la forme canonique du trinôme on sait que $9x^2+6x+5 = 9\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+4$. On a donc pour tout réel h, $f\left(-\frac{1}{3}+h\right) = \sqrt{9h^2+4}$

et $f\left(-\frac{1}{3}-h\right) = \sqrt{9(-h)^2+4} = \sqrt{9h^2+4} = f\left(-\frac{1}{3}+h\right)$. La droite D d'équation $x = -\frac{1}{3}$ est donc bien axe de symétrie de $\mathcal{C}$.

Remarque : cette astuce évite des calculs longs et fastidieux

1

4°)

Etudions le signe sur $\mathbb{R}$ de $f(x) - (3x+1)$.

$f(x) - (3x+1) = \sqrt{9x^2+6x+5} - (3x+1)$. Or pour tout réel x $\sqrt{9x^2+6x+5} = \sqrt{(3x+1)^2+4}$ soit

$\sqrt{9x^2+6x+5} > \sqrt{(3x+1)^2}$ càd $\sqrt{9x^2+6x+5} > |3x+1|$

Donc si $x \geq -\frac{1}{3}$, $|3x+1| = 3x+1$ et $\sqrt{9x^2+6x+5} > 3x+1$ donc $f(x) - (3x+1) > 0$. Si $x \leq -\frac{1}{3}$ alors $-(3x+1) > 0$ et $f(x) + [-(3x+1)] > 0$ car $f(x) > 0$ pour tout réel x.

On en déduit que pour tout réel x $f(x) - (3x+1) > 0$ et $\mathcal{C}$ est toujours au-dessus de $\mathcal{D}$.

EX 2

1°) Posons $g(x) = x - \cos x$. Alors $g'(x) = 1 + \sin x$.

Comme $\sin x \geq -1$ pour tout réel x alors $g'(x) \geq 0$ pour tout réel x et en particulier $g'(x) > 0$ pour tout réel $x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi$, k dans $\mathbb{Z}$.

g' est donc strictement positive sur $\mathbb{R}$ ~~sauf~~ en des valeurs isolées ~~donc~~ où elle s'annule donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

g étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui contient 0 alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$

$\mathcal{D}f = \mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$. Rq : avec la calculatrice $\alpha \simeq 0,73$

2°) a) Pour tout réel $x \geq 2$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{donc}$$

$$-1 \leq -\cos x \leq 1 \quad \text{et}$$

$$x - 1 \leq x - \cos x \leq x + 1$$

En passant à l'inverse on obtient $\dfrac{1}{x+1} \leq \dfrac{1}{x-\cos x} \leq \dfrac{1}{x-1}$

d'où $\dfrac{1}{x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x-1}$. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0$ et

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

b) Pour tout réel $x \leq -2$ on a aussi

$\dfrac{1}{x+1} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x-1}$ d'où $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$

3°) $\mathcal{C}_f$ admet d'après le 2°) l'axe des abscisses d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

$g(x) > 0$ si $x > \alpha$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x > \alpha}} f(x) = +\infty$

De plus on a $\lim\limits_{\substack{x \to \alpha \\ x < \alpha}} f(x) = -\infty$

On en déduit que la droite d'équation $x = \alpha$ est asymptote verticale de $\mathcal{C}$.