CONTROLE N°2 TRIMESTRE 2 MATHS SPECIALITE 01/02/21 DUREE :1Hcorrige

EXERCICE 1

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n=20 et p = 0. 15
   P(X=4) =

a. 0.147 b. 0.251 c. 0.830 d. 0.182

2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n=60 et p = 0.285
   P(X> 7) =

a . 0.159 b. 0.0059 c. 0.9984 d. 0.737

3. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n=45 et p= 0.8 .Déterminer le plus petit entier a tel que P(X≤ a) ≥0,9.
   $a.$ 23 b. 42 c. 39 d. 34

   Déterminer le plus grand entier b tel que P(X ≤ b) ≤ 0,1

a. 35 b. 20 c.14 d.32

EXERCICE 2

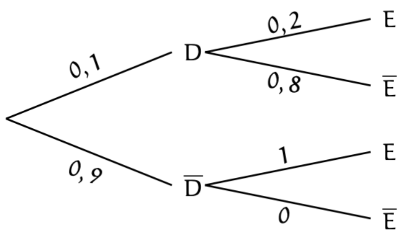
1) a) X est une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,1$.

b) • $p(A) = p(X = 0) = \binom{8}{0} \times (0,1)^0 \times (0,9)^8 = 0,9^8 = 0,43$ à 10^{-2} près.

• $p(B) = p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0,9^8 = 0,57$ à 10^{-2} près.

• $p(C) = p(X = 2) = \binom{8}{2} \times (0,1)^2 \times (0,9)^6 = 28 \times (0,1)^2 \times (0,9)^6 = 0,15$ à 10^{-2} près.

2) a) Traduisons la situation par un arbre.



b) La formule des probabilités totales permet d'écrire

$$p(E) = p(D \cap E) + p(\overline{D} \cap E) = p(D) \times p_D(E) + p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(E) = 0,1 \times 0,2 + 0,9 \times 1 = 0,92.$$

$\boxed{\text{La probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle est } 0,92.}$

c) La probabilité demandée est $p_E(D)$. Or

$$p_E(D) = \frac{p(E \cap D)}{p(E)} = \frac{p(D) \times p_D(E)}{p(E)} = \frac{0,1 \times 0,2}{0,92} = 0,022 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

$\boxed{\text{La probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est } 0,022 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$

3) Notons Y le nombre de stylos ayant un défaut après le contrôle. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de BERNOULLI. En effet,

- 8 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le stylo a un défaut » avec une probabilité $p = 0,022$ (d'après 2.) ou « le stylo n'a pas de défaut » avec une probabilité $1 - p = 0,978$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,022$.

La probabilité demandée est $p(Y = 0)$.

$$p(Y = 0) = \binom{8}{0} \times (0,022)^0 \times (0,978)^8 = 0,84 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

Ainsi, la probabilité est passée de $0,43$ avant le contrôle à $0,84$ après le contrôle. Cette probabilité a nettement augmenté et le contrôle semble efficace.

EXERCICE 3

Partie A : Résolution d'une équation différentielle

1. **a.** La solution générale de l'équation différentielle est $y = Ce^{-x}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

   b. Il faut que $\frac{1}{e} = Ce^{-1}$ soit $C = 1$.
   La solution est donc $y = e^{-x}$.

Partie B : étude d'une fonction auxiliaire f

$$f(x) = e^{-x} - x.$$

1.

- On a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$;
- On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$ et • On a $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = +\infty$, donc par somme de limites $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2. $f'(x) = -e^{-x} - 1$.
Or $e^{-x} > 0$ quel que soit le réel x, donc $-e^{-x} < 0$ et enfin $-e^{-x} - 1 < 0$; $f'(x) < 0$ quel que soit le réel x : la fonction f est strictemet décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. a. La fonction f étant strictement décroissante de plus l'infini à moins l'infini, s'annule une seule fois pour $x = \alpha$.
Or $f(0) = 1$ et $f(1) = e^{-1} - 1 \approx -0,6$; ceci montre que $0 < \alpha < 1$.

b. La calculatrice donne :
$f(0,5) \approx 0,1$ et $f(0,6) \approx -0,05$ donc $0,5 < \alpha < 0,6$;
f(0,56) $\approx 0,011$ et $f(0,57) \approx -0,005$, donc $0,56 < \alpha < 0,57$.

4. La fonction décroit de plus l'infini à zéro sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ \alpha]$, donc est positive sur cet intervalle puis négative sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$.