CONTROLE DE. MATHS N°1 TS2 TRIMESTRE 3 DUREE : 2H Le 10/03/20

EXERCICE 1(4 points)

Soit f la fonction définie sur I = $\mathbb{R}^+$ par f(x) = $\frac{x^2+9x+21}{(x+4)^2}$.

1°) Justifier que f (x) = $1 + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{(x+4)^2}$ pour tout x de I.

2°) Calculer $\int_0^2 f(x)\,dx$.

EXERCICE 2(8 points)

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par f(x) = -1 + $\int_1^x \frac{e^t}{t+1}\,dt$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur I = $[0\,; +\infty[$ par g(x) = $e^x - x - 1$.

1°) Déterminer la limite de g(x) en + ∞ .

2°) Donner le tableau de variation de la fonction g sur I.

3°) En déduire le signe de la fonction g sur I.

Partie B

1°) Montrer que f est continue sur I.

2°) a) Calculer f ’(x) .

b) Etudier les variations de f sur I.

3°) a) Calculer f (1).

b) Grâce à la partie A, montrer que $\frac{e^t}{t+1} \geq 1$ pour tout réel t positif.

Puis montrer que f(2) ≥ 0.

c) En déduire que l’équation f (x) = 0 admet une unique solution sur I.

EXERCICE 3 (8 points)

L'exercice a pour objet étudier la suite (I_n) définie pour tout entier naturel par les relations

$I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x$, $I_1 = \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x$, …, $I_n = \int_0^1 \frac{e^{nx}}{1+e^x}\mathrm{d}x$ …

1°) Calculer $I_0 + I_1$ et I_1. En déduire la valeur de I_0 .

2°) a) Calculer $I_n + I_{n+1}$ en fonction de n.

b) En déduire les valeurs de I_2 et I_3.

3°) a) Comparer e^{nx} et $e^{(n+1)x}$ lorsque $x \in [0 ; 1]$.

b) En déduire le sens de variation de la suite (I_n).

4°) a) Montrer que, pour tout nombre $x \in [0 ; 1]$, $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{2}$.

(Indice : on commencera par encadrer e^x).

b) Calculer $\int_0^1 e^{nx}\mathrm{d}x$. En déduire un encadrement de (I_n).

c) Quelle est la limite de la suite (I_n)?