FONCTIONS
FICHE 2 : CONTINUITE

I) Continuité généralités
1°) Notion de continuité

Définition 1

Soit une fonction f définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$.
La fonction f est dite **CONTINUE EN a** si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Exemple : $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Nous savons que f admet une limite en 1 et que

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$ or, $f(1) = 0$

donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$ et f est continue en 1

Définition 2

On dit que f est continue sur un intervalle ouvert I ssi elle est continue en tout point de cet intervalle.

Exemples : Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$, les fonctions rationnelles, irrationnelles, trigonométriques, et la fonction valeur absolue sont continues sur chaque intervalle qui compose leur ensemble de définition.

2°) Propriété

Soit u et v des fonctions continues sur un intervalle I.

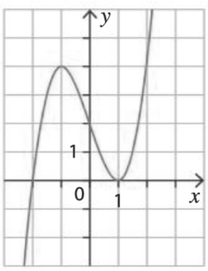
- $u + v$, $u \times v$ et u^n sont continues sur I
- $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont continues sur les intervalles où elles sont définies.

Exemples : La fonction $f : x \to x^2 + 2x + 3$ est continue sur R

La fonction $f : x \to \dfrac{x-2}{x-1}$ est continue sur $]-\infty ; 1[$ et continue sur $]1 ; +\infty[$

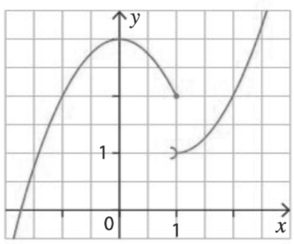
Exemple et contre-exemples :

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x^3 - 3x + 2$.



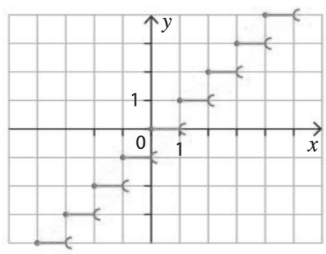
f est continue sur $\mathbb{R}$.

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{si } \leqslant 1 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



f n'est pas continue en 1, donc elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = E(x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x.



Quel que soit n entier, f n'est pas continue en n, donc f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

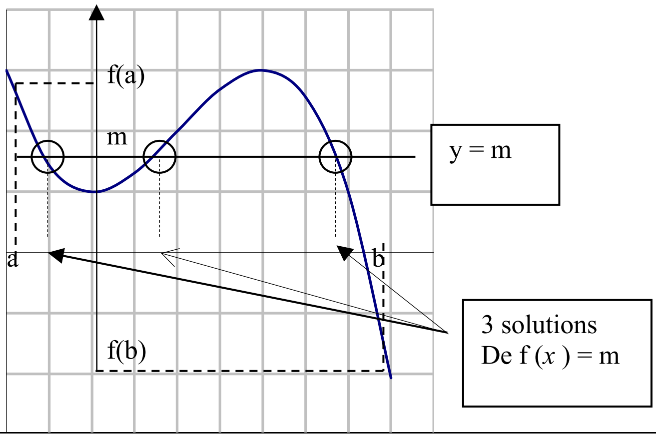
II) CONTINUITE ET MONOTONIE

1°)Convention dans un tableau de variation

UNE FLECHE dans le tableau de variations d'une fonction f indique :

- **La stricte croissance (↗) ou la stricte décroissance (↘)**
- **La CONTINUITE de la fonction f sur cet intervalle**

2°) Théorème des valeurs intermédiaires (admis)



Soit une fonction f **CONTINUE sur un intervalle $[a; b]$**

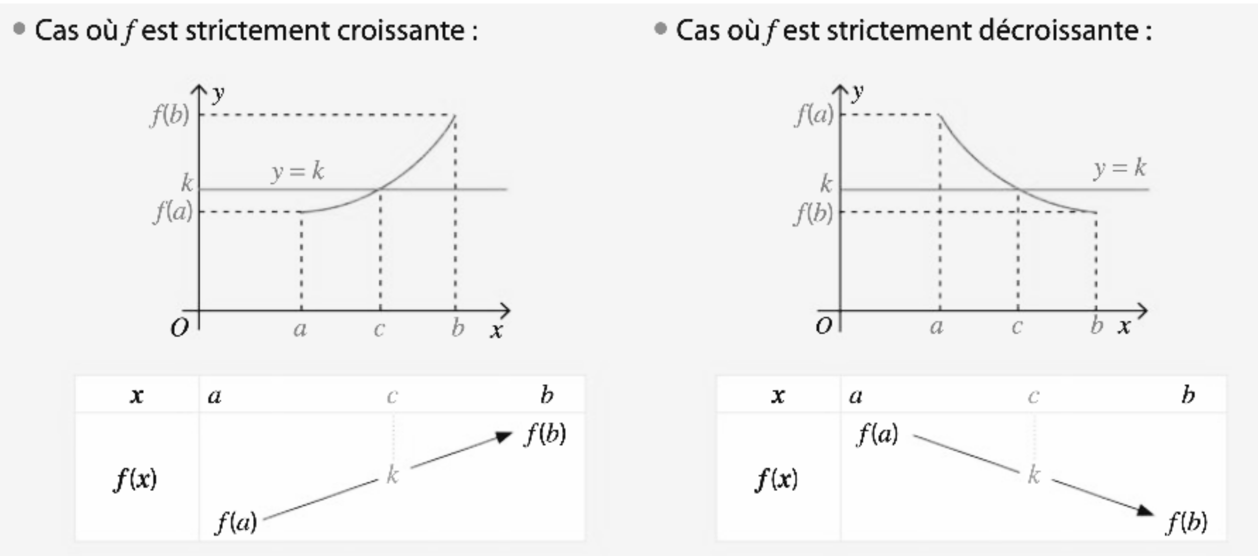
Pour tout réel m compris entre f(a) et f(b)
L'équation f(x) = m admet au moins une solution dans [a ;b].

Remarque :

Cela signifie que, quand x varie de a à b, $f(x)$ prend toutes les valeurs intermédiaires comprises entre $f(a)$ et $f(b)$.

Voir Activité sur la lecture d'un tableau de variations et l'image d'un intervalle

3°) Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires



Soit une fonction f **continue et STRICTEMENT MONOTONE sur un intervalle $[a; b]$**

Pour tout réel m compris entre f(a) et f(b), l'équation f(x) = m admet une UNIQUE solution dans [a ;b].

Remarque: On généralise ce théorème à l'intervalle ouvert de I = $]a; b[$ où a et b peuvent être des réels ou $+\infty$ *ou* $-\infty$

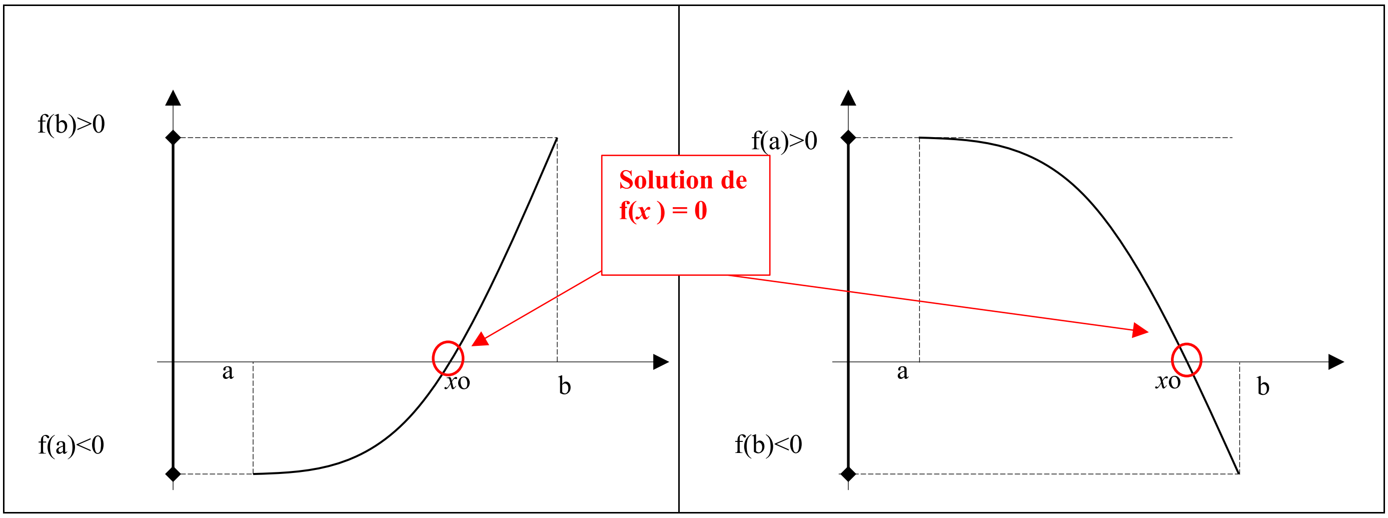
Démonstration à connaître p 11

CAS PARTICULIER : Résolution d'une équation du type f(x) = 0

On suppose que **f(a) × f(b) <0. (càd f(a) et f(b) de signes contraires .** Alors on écrit selon le cas:

f est **continue et strictement croissante** de l'intervalle [a ; b] à valeurs dans [f(a) ; f(b)] qui contient 0 donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires relatif aux fonctions strictement monotones , l'équation f(x)=0 admet une unique solution x_0 dans [a ;b].

f est **continue et strictement décroissante** de l'intervalle [a ; b] à valeurs dans [f(b) ; f(a)] qui contient 0 donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires relatif aux fonctions strictement monotones , l'équation f(x)=0 admet une unique solution x_0 dans [a ; b]



VOIR LES FICHES PRATIQUES SUR LA DETERMINATION D'UNE SOLUTION

III Continuité et limites de suites

Théorème

Soit une suite (U_n) définie par **U_0 et $U_{n+1}=f(U_n)$**.
Si (U_n) converge vers un réel a et si **f est continue en a** alors a est solution de l'équation a =f(a) (on dit aussi que a est un point fixe de f).

Preuve à savoir :

f est continue en a donc $\lim_{x \to a} f(x)$ = f(a).
(U_n) converge vers a soit $\lim_{n \to +\infty} U_n$ = a.
Donc par composition des limites on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} f(U_n)$ = f(a) soit encore $\lim_{n \to +\infty} U_{n+1}$ = f(a) . Or $\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} U_n = a$ donc a=f(a).

Exercice d'application

La suite (U_n) est définie par $U_0 = 0.5$ et pour tout n de N , $U_{n+1} = U_n{}^2 + U_n$

1°) Etudier le sens de variation de la suite (U_n).

2°) f(x) = $x^2 + x$.

a)Démontrer que si x dans I = $[-1\ ;\ 0\ ]$ alors f(x) dans I.

b)On admet que pour tout n de N on a -1<U_n<0. Étudier la convergence de la suite et déterminer sa limite si elle existe.

Activité sur la lecture d'un tableau de variations et l'image d'un intervalle

RAPPEL : LES INTERVALLES OUVERTS, SEMI–OUVERTS, BORNES OU NON

Voici des exemples d'intervalles bornés :
[-1 ; 4] est un intervalle fermé et borné. [-1 ; 4[est semi – ouvert et borné tout comme] -1 ;4].]-1 ;4[est ouvert et borné.
Voici des exemples d'intervalles non bornés (ils sont au moins semi – ouverts) .

[-3 ; +∞[est un intervalle semi-ouvert non borné (à droite)] -3 ; + ∞ [est ouvert non borné .
] - ∞ ; 4] est un intervalle semi-ouvert non borné (à gauche)] - ∞ ; 4 [est ouvert non borné . et puis R .

1°)Déterminer dans chaque cas l'image f(I) de I puis dire si l'équation f (x) = m admet une unique solution dans I.

x	1	3
f(x)	-5 ↗	2

f ([1 ;3]) = [-5 ;2]

a) f (x) = 0 V
b) f (x) = 3 F

x	- ∞	-√2
f(x)	0 ↘	-4

f ( ]-∞ ;-√2]) = [-4 ;0[

a) f (x) = 0 F
b) f (x) = - 2 V

x	6	12
f(x)	‖ +∞ ↘	-14

f(]6 ;12])=[-14 ;+∞[

a) f (x) = 0 V
b) f (x) = 5 V

x	- ∞	+∞
f(x)	0 ↗	+∞

f®=R+*

a) f (x) = 0 F
b) f (x) = 3 V

2°)Déterminer dans chaque cas l'image f(I) de I puis le nombre de solutions de l'équation f (x) = m dans I.

x	1	4	9
f(x)	-2 ↗	5 ↘	-6

f ([1 ; 9]) = [-6 ;5]

c) f (x) = 0
d) f (x) = 3

x	- ∞	0	4
f(x)	0 ↘	-1 ↗	+∞

f ( ]-∞ ;4]) = [-1 ; +∞ [

b) f (x) = 0
b) f (x) = - 2

x	-1	10	34
f(x)	‖ + ∞ ↘	0 ↗	2500

f(]-1 ; 34])=[0 ;+∞[

a) f (x) = 0
b) f (x) = 5

x	- ∞	-2	0	+∞
f(x)	-6 ↗	4 ↘	-5 ↗	0

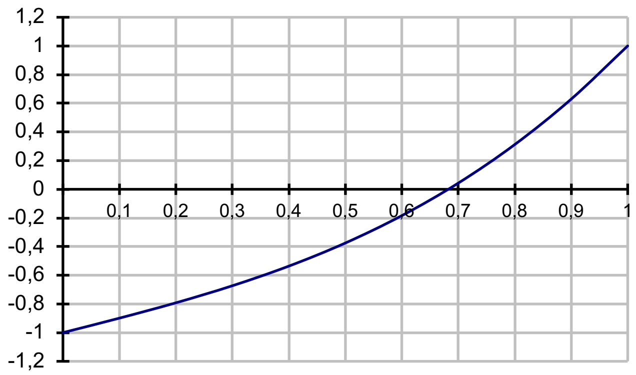
f(R)=]-6 ; 4]

b) f (x) = 0
b) f (x) = 3

FICHE PRATIQUE N°1
SUR LA DETERMINATION D'UNE SOLUTION D'EQUATION EN UTILISANT LE COROLLAIRE DU THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES

<u>Etude détaillée d'un exemple</u>

Soit f la fonction polynôme définie sur I=[0 ;1] par
$f(x)= x^3 + x - 1$. Ce polynôme n'admet pas de racines évidentes dans I , on va donc essayer de trouver la solution de $f(x)= 0$ à l'aide d'une autre méthode.
Sur la courbe ci-contre on voit que l'équation $f(x)=0$ admet bien une solution dans I.



Dans un premier temps on va donc démontrer l'existence de la solution et l'unicité. Pour cela on étudie les variations de f sur I.

$f'(x)= 3x^2 + 1$ donc f ' □ 0 sur I .

Le tableau de variation est donc

x	0	x_0	1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	-1	0	1

f étant continue et strictement croissante sur l'intervalle [0 ;1] à valeurs dans l'intervalle [-1 ;1] qui contient 0 alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution x_0 dans [0 ;1] **d'après le corollaire du Th des V.I. relatif aux fonctions stt monotones**

Maintenant que l'on a démontré <u>l'existence et l'unicité</u> de la solution de l'équation $f(x)= 0$ on va donné à l'aide de la calculatrice un encadrement de cette solution à 10^{-2} près. En effet on a :

0 □ x_0 □1

Il existe deux méthodes pour déterminer un encadrement de x_0 : le balayage et la dichotomie.

<u>Le balayage</u>

On va diviser l'intervalle I en 10 intervalles de longueur 0.1 , on dit que l'on effectue un balayage avec un pas de 0.1.
On obtiendra alors une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près :

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$f(x)$	**-1**	**-0.89**	**-0.79**	**-0.67**	**-0.53**	**-0.37**	**-0.18** -	**0.04** +	**0.31**	**0.62**	**1**

On fait le même travail dans un autre tableau pour trouver l'encadrement de x_0 à 10^{-2} près.

x	**0,6**	**0.61**	**0.62**	**0.63**	**0.64**	**0.65**	**0.66**	**0.67**	**0.68**	**0.69**	**0.7**
$f(x)$	**-0.18**	**-0.16**	**-0.14**	**-0.11**	**-0.09**	**-0.07**	**-0.05**	**-0.02**	**-0.005** -	**0.01** +	**0.04**

<u>Conclusion</u> : $0,68 < x_0 < 0,69$

<u>Pratique : Comment rédiger sur la copie</u>

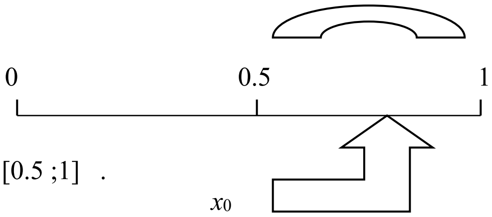
On démontre dans un premier temps l'existence et l'unicité de la solution dans l'intervalle du type <u>(le plus souvent) [n ; n+1]</u>

puis on utilise sa calculatrice et on écrit : comme f(a) ≈… et f(a') ≈… soit f(a) x f(a') ≈ - …

<u>càd f(a) x f(a') < 0 alors</u> $a < x_0 < a'$

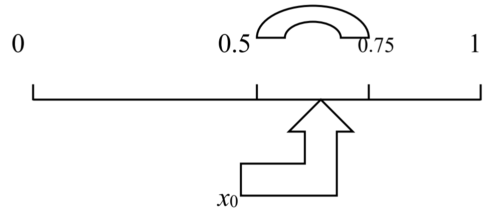
La dichotomie

Le principe c'est de diviser l'intervalle en deux à chaque fois en cherchant « de quel côté » se trouve x_0.
Dans notre exemple on a I = [0 ; 1] .Le centre de I est 0.5



Or f(0.5)= -0.375 donc $x_0 \in [0.5 ;1]$.

Ensuite on va couper en deux l'intervalle [0.5 ; 1] Son centre est 0.75. Or f(0.75)=0.17 donc $x_0 \in [0.5 ;0.75]$



Donc en définitive $0.5 < x_0 < 0.75$. Et ainsi de suite : f((0.5+0.75)/2)= f(0.625)=-0.13.
D'où $0.625<x_0< 0.75$. On voulait un encadrement d'ordre 10^{-2}, or f(0.6875) = 0.12 ce qui donne
$0.625 <x_0< 0.6875$
On trouve finalement $0.6796875 < x_0< 0.6875$ soit à 10^{-2} près
On trouve $0,68 < x_0 < 0,69$

Remarque : le plus astucieux c'est d'utiliser les deux méthodes.

ALGORITHME POUR LA DICHOTOMIE

Saisir *a*, *b*, *e*
Tant que $b - a \geqslant e$
m prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
Si $f(a) \times f(m) \leqslant 0$
alors *b* prend la valeur *m*
sinon *a* prend la valeur *m*
Fin Si
Fin Tant que
Afficher *a* et *b*.

Exercice

On admet que l'équation $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$ a une seule solution α dans l'intervalle [0 ; 4].

1. Donner un encadrement de α à 0,01 près par balayage avec la calculatrice.

2. Programmer l'algorithme de dichotomie. L'exécuter pour avoir une précision de 0,01.

Solution

1.

X	Y1
0	6
1	1
2	-10
3	-21
4	-26
5	-19
6	6

$f(1) > 0$ et $f(2) < 0$
donc $1 < \alpha < 2$

X	Y1
1	1
1.1	.071
1.2	-.912
1.3	-1.943
1.4	-3.016
1.5	-4.125
1.6	-5.264

$f(1,1) > 0$ et $f(1,2) < 0$
donc $1,1 < \alpha < 1,2$

X	Y1
1.1	.071
1.11	-.025
1.12	-.1215
1.13	-.2185
1.14	-.3161
1.15	-.4141
1.16	-.5127

$f(1,1) > 0$ et $f(1,11) < 0$
donc $1,1 < \alpha < 1,11$

La calculatrice ou l'ordinateur affiche 1,1015625 et 1,109375. On en déduit que $1,1 < \alpha < 1,11$

2.
```
def  f(x) :
        return x**3-6*x**2+6
def  dicho(a,b,e):
        while b-a>e:
            m = (a+b)/2
            if f(a)*f(m)<=0:
                b=m
            else :
                a=m
        return a,b
```

FICHE PRATIQUE N°2
SUR LA DETERMINATION D'UNE SOLUTION D'EQUATION
EN UTILISANT LE COROLLAIRE DU THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES

Utiliser un algorithme de dichotomie

L'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[-1 ; 1]$ (voir exercice **14**).
L'algorithme ci-contre permet d'obtenir une valeur approchée de x_0 à 10^{-n} près où n est un nombre entier naturel.
a) Exécuter cet algorithme pas à pas en complétant un tableau de valeurs lorsqu'on affecte au début la valeur -1 à la variable a, la valeur 1 à la variable b et la valeur 1 à la variable n. Interpréter la valeur de la variable m à la fin de l'exécution de l'algorithme.
b) Coder cet algorithme en langage Python.
Saisir et exécuter le programme obtenu avec $n = 4$ et interpréter le résultat renvoyé.

```
Tant que b − a > 10^(−n)
    m = (a + b)/2
    Si f(a) × f(m) < 0 alors
        b = m
    sinon
        a = m
    Fin Si
Fin Tant que
```

Solution

a)

a	-1	0	0	0,25	0,25	0,312 5
b	1	1	0,5	0,5	0,375	0,375
$b - a > 10^{-1}$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
m	0	0,5	0,25	0,375	0,312 5	
$f(a) \times f(m) < 0$	Faux	Vrai	Faux	Vrai	Faux	

Avec la calculatrice, on détermine les signes de $f(a)$ et $f(m)$.

Lorsqu'à la dernière étape, $b - a \leqslant 10^{-1}$ (ici, $0,375 - 0,312\,5 = 0,062\,5$) l'algorithme renvoie la valeur de m obtenue à l'étape précédente. Donc, ici l'algorithme renvoie $m = 0,312\,5$.
Cela signifie qu'une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près est 0,312 5.

b)

```python
def f(x):
    y=x**3-3*x+1
    return y

def Dichotomie(n):
    a=-1
    b=1
    while b-a>10**(-n):
        m=(a+b)/2
        if f(a)*f(m)<0:
            b=m
        else:
            a=m
    return m
```

Le résultat, renvoyé ci-contre par le programme, fournit une valeur approchée au dix-millième près de x_0.

```
>>> Dichotomie(4)
0.34735107421875
```

Le mot « dichotomie » provient du grec *dikhotomia* qui signifie « division en deux parties ».
L'algorithme de dichotomie consiste à répéter le partage en deux d'un intervalle à l'aide de son centre puis à sélectionner celui des deux « demi-intervalles » dans lequel est localisée la solution x_0.