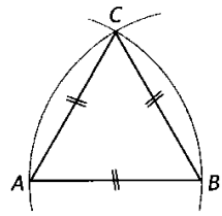
# Triangles

## 1°) Triangles

### Triangle équilatéral

**Définition** Un triangle équilatéral est un triangle qui a trois côtés de même longueur.




**Propriétés caractéristiques** Un triangle équilatéral est :

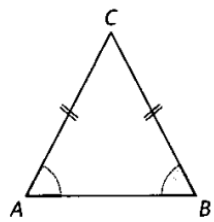
- un triangle qui a trois angles de même mesure 60° ;
- un triangle qui a trois axes de symétrie.

**Propriété**

La hauteur du triangle équilatéral *ABC* est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2} \times AB$.

### Triangle isocèle

**Définition** Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés de même mesure.



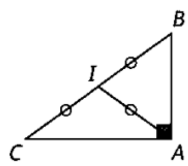

**Propriétés caractéristiques** Un triangle isocèle est :

- un triangle qui a un axe de symétrie ;
- un triangle qui a une médiane qui est aussi médiatrice ou hauteur ou bissectrice ;
- un triangle qui a deux angles de même mesure.

### Triangle rectangle

**Définition** Un triangle rectangle est un triangle qui a un angle droit.

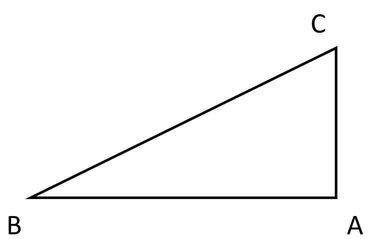
**Propriétés caractéristiques** (voir Pythagore)




**Propriété** Soit *ABC* un triangle, et *I* le milieu du segment [*BC*].

- Si le triangle *ABC* est rectangle en *A*, alors $BI = CI = AI$.
- Si $BI = CI = AI$, alors le triangle *ABC* est rectangle en *A*.

Trigonométrie




cos ABC =$\frac{AB}{BC}$

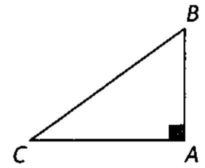
sin ABC = $\frac{AC}{BC}$

## 2°) Théorèmes

### Pythagore

**Théorème** • Si $ABC$ est un triangle rectangle en $A$, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

Sur la figure ci-contre, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ .



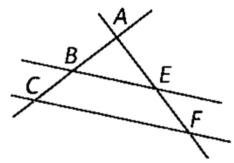

**Réciproque** Si dans un triangle $ABC$ on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$ , alors le triangle est rectangle en $A$.

**Contraposée** Si dans un triangle $ABC$ on a $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors le triangle n'est pas rectangle en $A$.

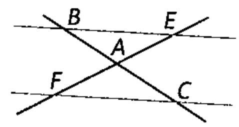
### Théorème de Thalès

**Théorème direct** Les droites $(BC)$ et $(EF)$ sont sécantes en un point $A$. Si les droites $(BE)$ et $(CF)$ sont parallèles, alors :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} = \frac{BE}{CF}.$$

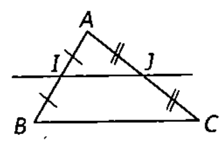



**Théorème réciproque** Si les points $A$, $B$, $C$ et $A$, $E$, $F$ sont respectivement alignés sur deux droites dans l'ordre donné sur les figures ci-contre et si $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{AF}$ , alors les droites $(BE)$ et $(CF)$ sont parallèles.

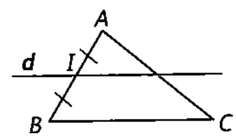



### Droite des milieux

**Théorème direct** Dans un triangle $ABC$ , si les points $I$ et $J$ sont respectivement les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$, alors les droites $(IJ)$ et $(BC)$ sont parallèles. De plus $IJ = \dfrac{1}{2}BC$ .



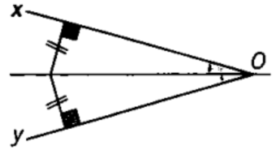

**Théorème réciproque** Dans un triangle $ABC$ , si la droite $d$ passe par le milieu $I$ du segment $[AB]$ et si les droites $d$ et $(BC)$ sont parallèles, alors la droite $d$ coupe le segment $[AC]$ en son milieu.



# 3°) Droites remarquables

## Bissectrice

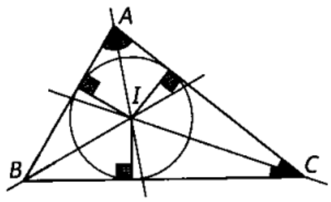
**Définition** La **bissectrice d'un angle** $\widehat{xOy}$ est l'axe de symétrie de l'angle $\widehat{xOy}$.




**Propriétés** • La bissectrice de l'angle $\widehat{xOy}$ partage cet angle en deux angles de même mesure.

• Tout point de la bissectrice de $\widehat{xOy}$ est équidistant des côtés $(Ox)$ et $(Oy)$.

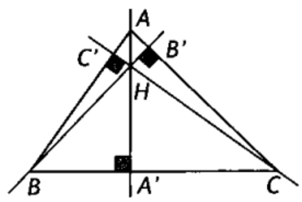
**Théorème** Les bissectrices des trois angles d'un triangle sont concourantes en un point, qui est le centre du cercle inscrit dans le triangle.




## Hauteurs

**Définition** La **hauteur issue du sommet** $A$ d'un triangle $ABC$ est la perpendiculaire à la droite $(BC)$ passant par le point $A$.
Le point d'intersection $A'$ de cette hauteur avec la droite $(BC)$ s'appelle pied de la hauteur.

**Théorème** Les hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point. Leur point d'intersection s'appelle l'orthocentre du triangle.

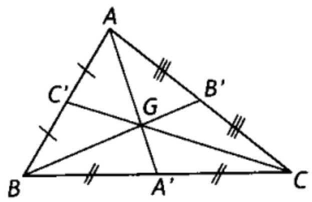



## Médiane

**Définition** Dans un triangle $ABC$, la **médiane issue de** $A$ est la droite $(AA')$ où $A'$ est le milieu du segment $[BC]$.

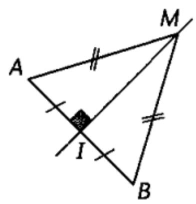
**Théorème** Les médianes d'un triangle sont concourantes en un point, appelé centre de gravité du triangle.
Le centre de gravité est situé au tiers de chaque médiane :

$GA = 2GA'$ ; $\quad AG = \frac{2}{3}AA'$ ; $\quad GA' = \frac{1}{3}AA'$.




## Médiatrice d'un segment

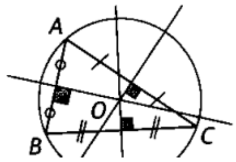
**Définition** La **médiatrice d'un segment** est la droite qui passe par le milieu de ce segment et qui est perpendiculaire à ce segment.




**Théorème 1** La médiatrice d'un segment est :

- l'axe de symétrie du segment ;
- l'ensemble des points $M$ équidistants de $A$ et de $B$ (c'est-à-dire tels que $AM = BM$).

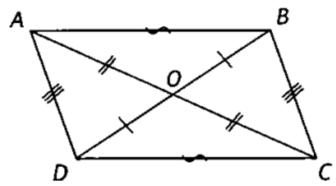
**Théorème 2** Les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes en un point, qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.



# Quadrilatères

## Parallélogramme

**Définition** Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu.

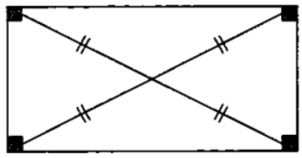



**Propriétés caractéristiques**

Un parallélogramme est :
- un quadrilatère qui a ses côtés parallèles deux à deux ;
- un quadrilatère non croisé qui a deux côtés opposés parallèles et de même longueur ;
- un quadrilatère qui a ses côtés opposés de même longueur.

## Rectangle

**Définition** Un **rectangle** est un quadrilatère qui a quatre angles droits.

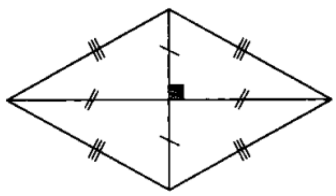


**Propriétés caractéristiques**

Un rectangle est :
- un parallélogramme qui a ses diagonales de même longueur ;
- un parallélogramme qui a un angle droit.

## Losange

**Définition** Un **losange** est un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même longueur.

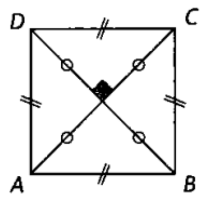


**Propriétés caractéristiques**

Un losange est :
- un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires ;
- un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur.

## Carré

**Définition** Un **carré** est un quadrilatère qui a ses quatre côtés de même longueur et un angle droit.




**Propriétés caractéristiques**

Un carré est :
- un parallélogramme qui a ses diagonales perpendiculaires et de même longueur ;
- un rectangle qui a deux côtés consécutifs de même longueur ;
- un losange qui a un angle droit.

**Propriétés** Dans un carré *ABCD*, on a :

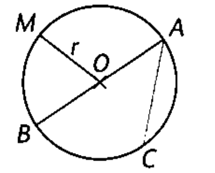
$\widehat{ACB} = \widehat{ACD} = 45°$ et $AC = \sqrt{2} \times AB$.

# Cercles et tangente

## Cercle

**Définition** Un **cercle** de centre $O$ et de **rayon** $r$ est l'ensemble des points $M$ du plan tels que $OM = r$.

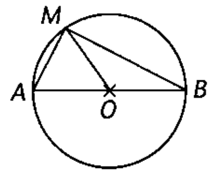
Sur la figure ci-contre :
- $[AB]$ est un diamètre ;
- $[AC]$ est une corde.




- Cercle inscrit dans un triangle (voir Bissectrice).
- Cercle circonscrit à un triangle (voir Médiatrice).

**Théorème** • Si le cercle circonscrit à un triangle $ABM$ a pour diamètre $[AB]$, alors ce triangle est rectangle en $M$.

• Si un triangle est rectangle, alors son hypoténuse est un diamètre de son cercle circonscrit.




## Tangente à un cercle

**Définition** La **tangente au cercle** de centre $O$ au point $A$ est la droite passant par $A$ et perpendiculaire à la droite $(OA)$.