COMPLEXES

FICHE 2 : POLYNÔMES ET COMPLEXES

1°) EQUATIONS DU SECOND DEGRE

Propriété

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue z où **a, b et c sont réels** avec **$a \neq 0$**.Le discriminant De cette équation est le réel $\Delta = b^2 - 4ac$:

1. Si $\Delta > 0$ l'équation a deux solutions réelles distinctes z_1 z_2

2. Si $\Delta = 0$ l'équation a une solution double $z_0 = -b/2a$

3. Si $\Delta < 0$ l'équation a deux solutions complexes conjuguées qui sont

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$$

Exemple : Résoudre dans C l'équation $z^2 - 2z + 2 = 0$

$\Delta = -4 = (2i)^2$ $\quad z = 1 + i$ ou $z = 1 - i$

Propriété

Soit $f(z) = az^2 + bz + c$ où a, b et c sont réels avec $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$

1. Si $\Delta \neq 0$ alors $f(z) = a(z - z_1)(z - z_2)$

2. Si $\Delta = 0$ alors $f(z) = a(z - z_0)^2$

Exemple : Factoriser $f(z) = z^2 + 2z + 5 = (z + 1 + 2i)(z + 1 - 2i)$

Remarque : Résolution de $z^2 = a$

Si $a > 0$, $z = \sqrt{a}$ ou $z = -\sqrt{a}$

Si $a < 0$, $z = i\sqrt{|a|}$ ou $z = i\sqrt{|a|}$

2°) Formule du binôme de Newton

a) Combinaisons

Soit E un ensemble fini à n éléments et soit p un entier naturel inférieur ou égal à n.

Théorème et définition

Soit E un ensemble contenant n éléments et **p entier naturel tel que 0≤ p ≤n.**

Une combinaison de p éléments choisis parmi n est une partie de E contenant p éléments pris parmi les n éléments de E. Le nombre de parties à p éléments de E ou le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n

se note $\binom{n}{p}$, on lit « p parmi n » :

$$\binom{n}{p} = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-p+1)}{\mathbf{p} \times (p-1) \times \ldots \times 2 \times 1} = \frac{n\,!}{\mathbf{p\,!\,(n-p)\,!}}$$

Exemples :

1. Un damier contient 16 cases. Combien y a-t-il de façon de placer 3 jetons sur ces cases à raison d'un seul jeton par case ?
2. On marque 16 points dans un plan de telle sorte que trois qcq ne soient pas alignés : combien peut –on former de triangles ayant leurs sommets parmi ces points ?
3. Une urne contient 10 boules blanches et 15 rouges. On choisit simultanément quatre boules de l'urne.
   a. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
   b. Combien de tirages comportent deux blanches et deux rouges.

1. Placer trois jetons sur trois cases c'est comme choisir trois cases parmi 16 soit choisir une partie à 3 éléments dans un ensemble de 16 éléments $\binom{16}{3}=560$

2. C'est exactement le même raisonnement que ci- dessus donc 560 triangles.

3. a. $\binom{25}{4}=12560$

b.On choisit 2 boules blanches parmi 10 donc $\binom{10}{2}=45$

On choisit 2 boules rouges parmi 15 donc $\binom{15}{2}=105$

Le nombre total de choix est donc 45x105 = 4725 puisqu' à chaque choix de boule blanche on peut associer l'un des 105 choix de boules rouges et ceci 45 fois.

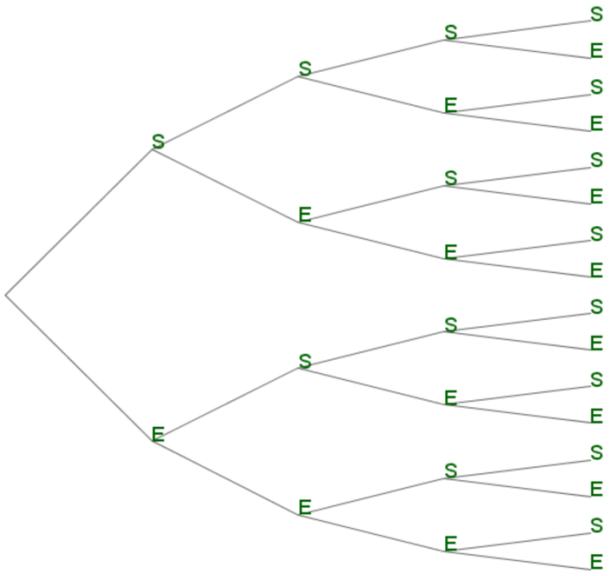
Remarque : On retrouve les combinaisons dans la loi de Bernoulli

On considère une répétition de n expériences identiques où pour chacune, il n'y a que deux possibilités :

- soit un succès (noté S),
- soit un échec (noté E ou $\bar{S}$)

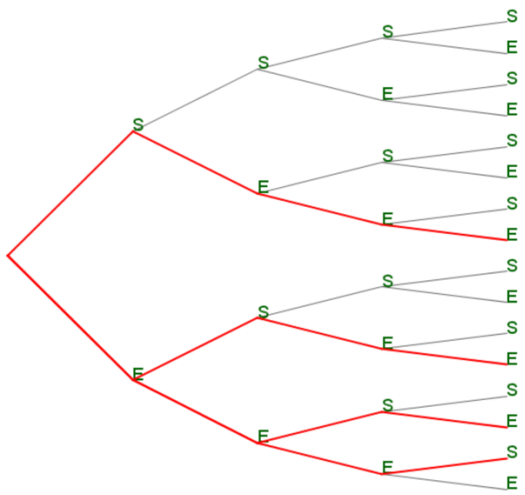
Par exemple au jeu de pile ou face .

On peut représenter cette répétition par un arbre comme ci-dessous où $n = 4$ répétitions sont considérées :



On s'intéresse maintenant aux chemins qui permettent d'avoir un nombre fixe k de succès.

Par exemple, dans l'arbre précédent, si l'on veut obtenir les chemins où l'on ne rencontre que $k = 1$ succès sur les $n = 4$ répétitions, on obtient l'image suivante :



Le nombre de chemins correspondant à 1 succès S est égal aux nombres de façons de placer S sur 4 nœuds c'est -à -dire

$$\binom{4}{1}$$

PROPRIETES

n et p sont des entiers naturels avec p≤ n – 1 et n ≥ 1

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
3. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
4. $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$

b) **Formule de Pascal et formule du binôme de Newton**
Théorème

Soit a et b deux nombres réels (ou complexes) et un entier naturel non nul. On a :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a^{n-k}b^k = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + b^n$$

Preuve : démonstration par récurrence livre p 20

Exemples :

1. Calculer $(a+b)^6$
2. Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer $N = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$ puis $S = \sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}$

1. $(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

2. $(1+1)^n = N = 2^n$. $f(x) = (1+x)^n$ donc $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ mais aussi

$f'(x) = \binom{n}{1} + 2x\binom{n}{2} + \ldots + nx^{n-1}\binom{n}{n}$ d'où $S = f'(1) = n2^{n-1}$.

Résolution : On présente les résultats sous forme d'un tableau.

Pour $p > n$, $\binom{n}{p}$ n'est pas défini (on peut aussi décider qu'il est nul).

Ainsi, aucun terme ne figure au-dessus de la diagonale sont tous nuls.
De plus, la formule de PASCAL s'interprète dans le tableau de la façon suivante : un nombre intérieur au « triangle » est égal à la somme des deux termes de la ligne précédente situés immédiatement au-dessus et immédiatement à gauche.

n \ p	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

$$\binom{5}{2} = \binom{4}{1} + \binom{4}{2}$$

On obtient :

$$\binom{7}{0} = 1 \; ; \binom{7}{1} = 7 \; ; \binom{7}{2} = 21 \; ; \binom{7}{3} = 35 \text{, etc.}$$

3°) Factorisation et racines d'un polynôme

Polynôme de degré n à coefficients réels

soit n un entier naturel et a_0, a_1, ... a_n des nombres réels tels que $a_n \neq 0$.
On appelle polynôme de degré n à coefficients réels la fonction P définie sur l'ensemble **C** par

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n$$

Equation polynomiale et racine d'un polynôme

L'équation $P(z) = 0$ est appelée équation polynomiale de degré n.
On appelle racine d'un polynôme P tout complexe z_0 tel que $P(z_0) = 0$.

Exemple : $P(z) = z^2 + 1$. L'équation $P(z) = 0$ est une équation polynomiale de degré 2.
I et – i sont racines du polynôme P car $P(i) = 0$ et $P(-i) = 0$.

Factorisation par z-a

On dit qu'un polynôme P est factorisable (ou divisible) par $z-a$ s'il existe un polynôme Q tel que $P(z)=(z-a)Q(z)$.

Trois propriétés importantes

Propriété 1 : soit a un nombre complexe. Pour tout nombre complexe z et tout entier naturel non nul n, $z^n - a^n$ est factorisable par $z-a$. En effet $z^n - a^n = (z-a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \ldots + a^{n-2}z + a^{n-1})$.

Exemple : $z^3 - 1 = (z-1)(z^2 + z + 1)$

Propriété 2 : le polynôme P est factorisable par $z - a$ si et seulement si a est une racine de P .

Exemple : Montrer que 1 est une racine de $P(z) = z^3 + 4z^2 - 2z - 3$

$P(1) = 1^3 + 4.1^2 - 2.1 - 3 = 0$
Propriété 3 : pour tout entier naturel $n \geq 1$, un polynome de degré n admet au plus n racines.

Conséquence de la propriété 3

Le nombre de solutions d'une équation polynômiale est inférieur ou égal à son degré

Exemple : on sait que si $P(z) = 3z^4 - 3z + 2$, l'équation $P(z) = 0$ admet au plus 4 solutions.