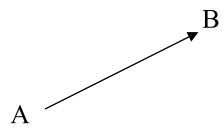
Vecteurs du plan

I) Translation et vecteurs

1°) Définition

A et B sont deux points distincts du plan. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour :

- DIRECTION, la direction de la droite (AB)
- SENS, le sens de A vers B
- NORME, la longueur AB



Remarque : Si A et B sont confondus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$, le vecteur NUL

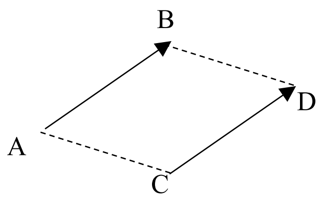
Le point A est **l'origine** du vecteur et le point B **l'extrémité**.

2°) Translation

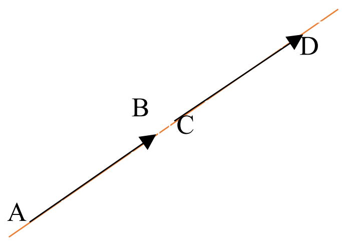
Définition

Soit A et B deux points du plan. Pour tout point C du plan, on construit l'unique point D tel que ABDC soit un parallélogramme (éventuellement aplati). On dit alors que le point D est l'image du point C par la translation qui transforme A en B. Cette translation est aussi appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Cas général : C n'appartient pas à (AB).



Cas partiulier : C appartient à (AB)

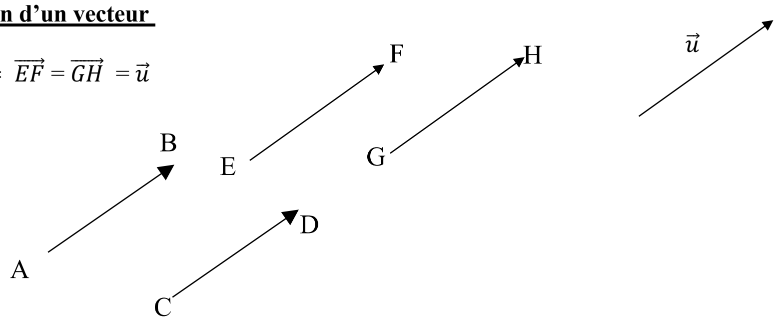


Définition

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie que la translation qui transforme A en B transforme C en D

Représentation d'un vecteur

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{GH} = \vec{u}$

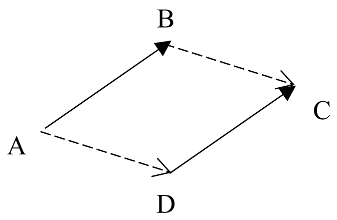


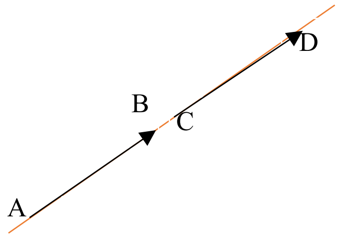
On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{GH}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$

3°) Propriété d'égalité

ABCD est un parallélogramme ssi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ **OU** $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

Cas général : C n'appartient pas à (AB). **Cas partiulier :** C appartient à (AB)





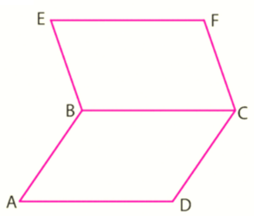
De plus

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si ces vecteurs ont même direction, même sens et même norme

Exemple :

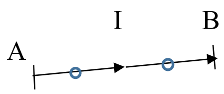
BCDA et BCFE sont deux parallélogrammes.

1 Démontrer que ADFE est un parallélogramme.



BCDA est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$
BCFE est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$. On en déduit donc que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF}$, donc ADFE est un parallélogramme.

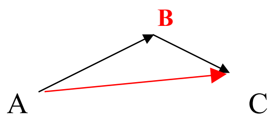
4°) Caractérisation du milieu



I est le milieu de [AB] ssi $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

II) Somme de vecteurs

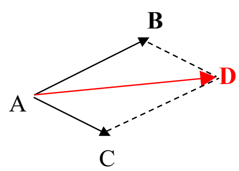
- **Addition : la relation de Chasles**



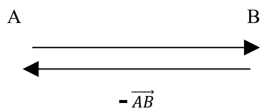
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

- **Règle du parallélogramme**

A, B et C sont trois points. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ ssi ABDC est un parallélogramme.



- $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ **les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont OPPOSES** (même direction, même norme, mais de sens contraire)



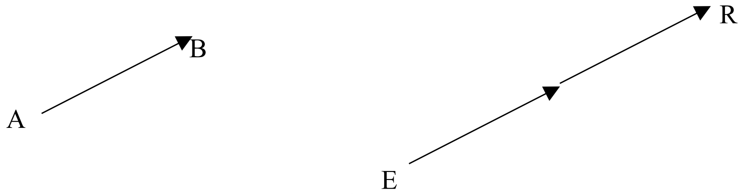
⇨ **Savoir construire des sommes de vecteurs (voir feuille d'exercices)**

III) Produit d'un vecteur par un réel . Colinéarité de deux vecteurs.

1°) Exemples

Exemple 1

On a un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on construit $\overrightarrow{ER} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$

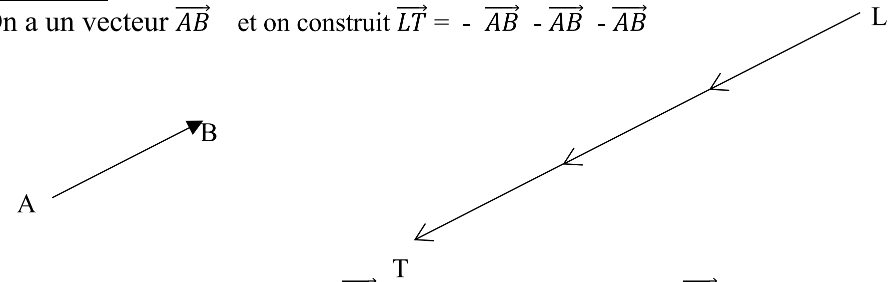


On obtient en fait le vecteur $2\overrightarrow{AB}$: c'est le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du réel 2.

- Sa direction est celle de $\overrightarrow{AB}$
- Sa longueur est 2AB
- Son sens est celui de $\overrightarrow{AB}$

Exemple 2

On a un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on construit $\overrightarrow{LT} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$



On obtient en fait le vecteur $-3\overrightarrow{AB}$: c'est le produit du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et du réel -3.

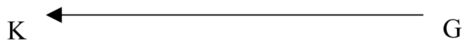
- Sa direction est celle de $\overrightarrow{AB}$
- Sa longueur est 3AB
- Son sens est celui de $\overrightarrow{BA}$

⇨ Voir Définition générale p 140 du livre

Remarque : $\overrightarrow{AB} = 1\,\overrightarrow{AB}$

Exemple : On a un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et on construit $\overrightarrow{HI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$. Le vecteur $\overrightarrow{HI}$ a pour longueur $\frac{3}{4}$ AB.

le vecteur $\overrightarrow{GK} = \frac{-5}{4}\overrightarrow{AB}$



3°) Règles de calcul

Pour tous réels k, k' et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

REGLE 1 : $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

REGLE 2 : $k(k'\vec{u}) = (kk')\vec{u}$

REGLE 3 : $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$

REGLE 4 : $k\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Exemples :

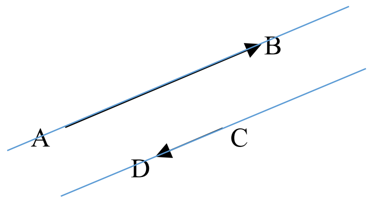
- $3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{CD}$ (règle 1).
- $5\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{u} = \left(5 - \frac{3}{2}\right)\vec{u}$ (règle 2). Donc $5\vec{u} - \frac{3}{2}\vec{u} = \frac{7}{2}\vec{u}$.
- $\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{10}\vec{u}\right) = \left[\left(\frac{5}{4}\right)\left(-\frac{1}{10}\right)\right]\vec{u}$ (règle 3). Donc $\frac{5}{4}\left(-\frac{1}{10}\vec{u}\right) = -\frac{1}{8}\vec{u}$.
- Si $5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, d'après la règle (4), $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ (car ici $k = 5$ et $5 \neq 0$). Donc A = B.

4°) Colinéarité de deux vecteurs et conséquences

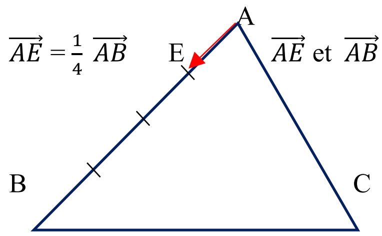
Définition

On dit que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **COLINEAIRES** s'ils ont **LA MEME DIRECTION**
C'est-à-dire si (AB) // (CD).

Ces deux vecteurs sont colinéaires



$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\,\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Théorème

Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ NON NULS .

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **COLINEAIRES** ssi il existe un réel k non nul tel que $\boldsymbol{\vec{u} = k\vec{v}}$

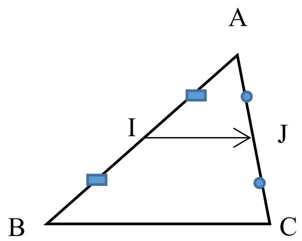
CONSEQUENCES

1- Parallélisme

Propriété

(AB)//(CD) SSI il existe un nombre k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires

Exemple :
On considère un triangle ABC.
I est le milieu du segment [AB] et J est le milieu du segment [AC]. $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.



2- Alignement

Propriété

Les points **A,B et C sont alignés** SSI il existe un nombre k non nul tel que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$ c'est-à-dire **$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires**

Exemple : $\overrightarrow{BF} = \frac{4}{5}\,\overrightarrow{BE}$ donc les points B, E et F sont alignés