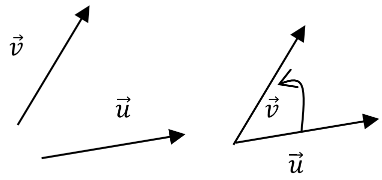
Produit scalaire

1°) Définitions

a) Rappel : Angle de deux vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Le couple ($\vec{u}$, $\vec{v}$) définit un angle orienté.



b) Définition du produit scalaire de deux vecteurs avec la formule du cosinus

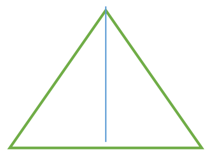
On appelle PRODUIT SCALAIRE DE SCALAIRE est le REEL défini par :

$$\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\vec{u},\vec{v})$$

- Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC \cos \widehat{BAC}$
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Exemple 1: Soit ABC un triangle équilatéral de côté a ; I, J et K les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$



Exemple 2 : Déterminer un Angle dans un triangle

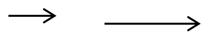
Soit A(-1 ;1) B(2 ;0) et C(1 ; 3) dans un repère orthonormal . Déterminer en radian une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$

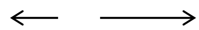
$\cos \widehat{BAC} = 1/\sqrt{5}$

Propriété

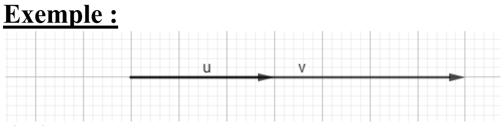
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires

De même sens $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||$ car $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \cos 0 = 1$ **et** de sens contraire $\vec{u}.\vec{v} = -||\vec{u}||.||\vec{v}||$ car $\cos(\vec{u},\vec{v}) = \cos \pi = -1$

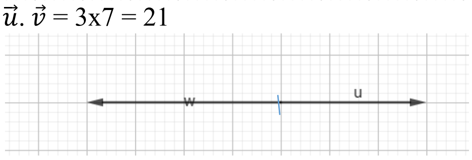




Exemple :



$\vec{u}.\vec{v} = 3x7 = 21$



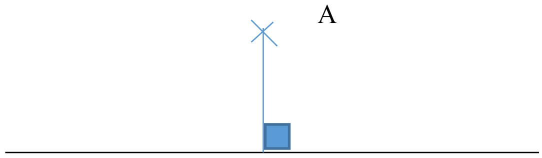
$\vec{u}.\vec{w} = 3x\text{-}4 = -12$

Remarque : ABC est un triangle rectangle en A.

on constate que si $\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ càd $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.

c) Calcul du produit scalaire avec la projection orthogonale

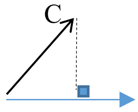
Rappel : Soit A un point du plan et une droite D . soit H le point de la droite (D) tel que (AH) ⊥(D). Le point H est appelé projeté orthogonal de A sur (D) .



Propriété

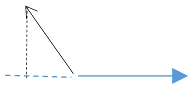
Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\ \overrightarrow{AH}$.

Si l'angle est aigu



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = ABxAH

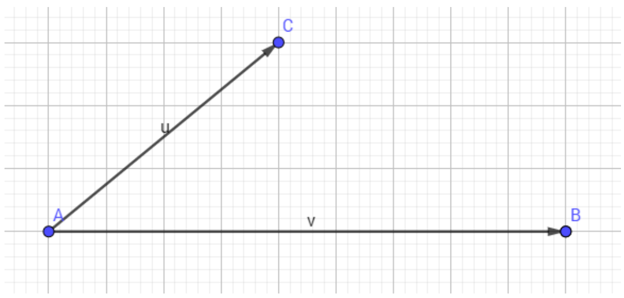
Si l'angle est obtu



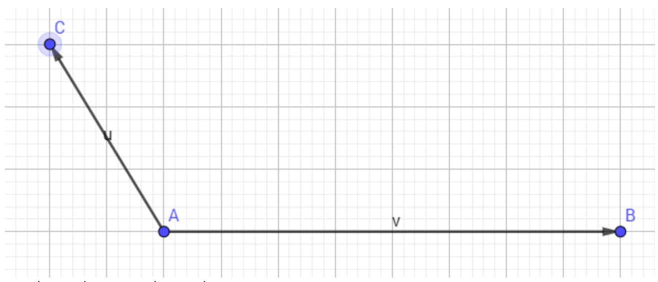
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = -ABxAH

Voir p 227 le lien entre les deux calculs

Exemple :



Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ = 4x9 = 36



Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ $\qquad$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ =- 2x8 = -16

d) Dans un repère

si $\vec{u}$ (x ; y) et $\vec{v}$ (x' ;y') alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

Exemple :

$\vec{u}$ **(3 ; -2) et** $\vec{v}$ **(4 ;3)** alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' = 12-6 = 6$

$\vec{u}$ **(3 ; -2) et** $\vec{v}$ **(2 ;3)** alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' = 6-6 = 0$

2°) Propriétés du produit scalaire

a) Règles de calculs

Pour tous les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace et pour tout réel k on a

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ $\quad$ $(k\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$ $\quad$ $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$

$\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^{\,2} = ||\vec{u}||^2$

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^{\,2} + 2\,\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$

Exemple :

b) Conséquences importantes : Calculer le produit scalaire à l'aide des normes

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 \right)$

$\vec{u}.\vec{v} = -\frac{1}{2}\left(||\vec{u} - \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2 \right)$

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}\left(||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u} - \vec{v}||^2 \right)$

Exemple : Soit ABC un triangle tel que AB = 6 AC = 5 et CB = 4 .

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

On trouve 22.5

c) Orthogonalité

Définition

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dits orthogonaux lorsque les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Propriété fondamentale

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi $\vec{u}.\vec{v} = \vec{0}$

Exemple :

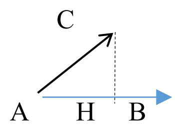
On considère un rectangle ABCD tel que AB = $\frac{3}{2}$ BC , $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4}\,\overrightarrow{BC}$

Montrer que les droites (DE) et (CF) sont orthogonales.

Corrigé :

On calcule $\overrightarrow{DE}\,.\,\overrightarrow{CF} = (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CE})(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF}) = 0 + \overrightarrow{AB}\,.\,\frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4}\,\overrightarrow{CB}\,.\,\overrightarrow{CB} + 0 = 0$

3°) Tableau Récapitulatif

Distance	Projection	Normes
$\vec{u}.\vec{v} = \lVert\vec{u}\rVert.\lVert\vec{v}\rVert.\cos(\vec{u},\vec{v})$ Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\cos\widehat{BAC}$	Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$	$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2 - \lVert\vec{u}\rVert^2 - \lVert\vec{v}\rVert^2\right)$ $\vec{u}.\vec{v} = -\frac{1}{2}\left(\lVert\vec{u}-\vec{v}\rVert^2 - \lVert\vec{u}\rVert^2 - \lVert\vec{v}\rVert^2\right)$ $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{4}\left(\lVert\vec{u}+\vec{v}\rVert^2 - \lVert\vec{u}-\vec{v}\rVert^2\right)$
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires De même sens $\vec{u}.\vec{v} = \lVert\vec{u}\rVert.\lVert\vec{v}\rVert$ De sens contraire $\vec{u}.\vec{v} = -\lVert\vec{u}\rVert.\lVert\vec{v}\rVert$	Si l'angle est aigu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = ABxAH  Si l'angle est obtu $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ = -ABxAH