NOM :

LE SUJET DOIT ETRE REMIS AVEC LA COPIE

CONTROLE BILAN DE MATHS N°3 Trimestre 1 TERMINALE SPECIALITE DUREE 2 H

Exercice 1 (7 pts)

La population d'une espèce de poisson est surveillée de près dans un lac.
Les changements climatiques ainsi que la pêche abusive font que cette population diminue de 16 % chaque année. Afin de compenser ces pertes, on réintroduit dans le lac 1000 individus à la fin de chaque année.
On souhaite étudier l'évolution de l'effectif de cette population au cours du temps. Pour cela, on modélise l'effectif de la population de l'espèce par la suite (u_n) où u_n représente l'effectif de la population au début de l'année 2022 + n .
On admet que pour tout entier naturel n, $U_n \geq 0$.

Au début de l'année 2022, la population étudiée compte 12 500 individus, ainsi $U_0 = 12\,500$.

1. Déterminer le nombre de poissons de l'année 2023 puis de l'année 2024.

2. Justifier que la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence: $U_{n+1} = 0{,}84U_n + 1000$.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $6250 < U_{n+1} \leq U_n$.

4. La suite (u_n) est-elle convergente? Justifier la réponse.

5. On souhaite déterminer le nombre d'individus qu'il restera en 2035. Dans le programme Python ci-dessous, la variable u désigne l'effectif de la population. Recopier et compléter ce programme afin qu'il réponde au problème .

```
u=
for i in range (…):
    u = ……
print ( …. )
```

6. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 6250$.

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison 0,84.

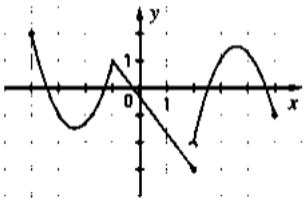
b) En déduire que,pour tout entier naturel n, $U_n = 6250(1+0{,}84^n)$.

c) Déterminer la limite de la suite (U_n). En donner une interprétation dans le contexte de cet exercice.

Exercice 2 (6 pts) QCM : Entourer la bonne réponse

1-

Soit f la fonction définie sur $[-4\,;5]$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe donnée ci-dessous.



f est continue sur :

$[-4;5]$	$[-4;1]$	$[2;5]$	$[0;5]$

2-

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
f(x)	-3	↘	-4	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	-1

f( ] -∞ ; 2[)=

]-3 ; +∞[	$]-4;+\infty[$	$[+\infty;-3]$	$[-4;+\infty[$

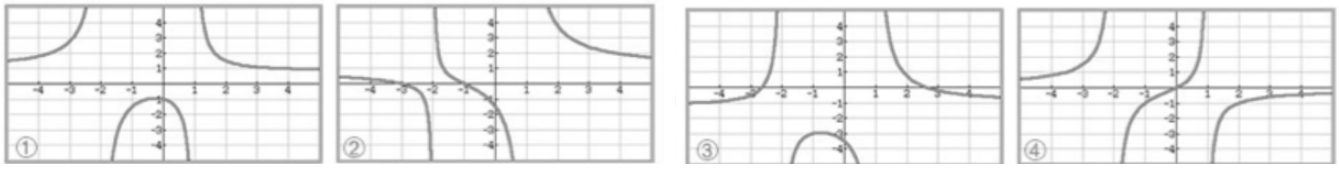
3- Soit f la fonction dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		0		4		6
f	0	↗	6	↘	-26	↗	6

L'équation f(x) =0 admet :

3 solutions	2 solutions	1 solution	0 solution

4-Soit f la fonction définie sur R - $\{-2;2\}$ par $f(x)=\frac{x^2+4x+3}{x^2+x-2}$. Déterminer la courbe de f .



5- On considère la fonction f(x) = $\sqrt{\frac{9x^2+6}{4x^2+5}}$. La limite de f en + ∞ est égale à :

+∞	1.5	$\sqrt{\frac{6}{5}}$	0

6- On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n = 1+\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

On considère de plus une suite (w_n) qui, pour tout entier naturel n, vérifie $u_n \leqslant w_n \leqslant v_n$.
On peut affirmer que :

a. Les suites (u_n) et (v_n) sont géométriques.

b. La suite (w_n) converge vers 1.

c. La suite (u_n) est minorée par 1.

d. La suite (w_n) est croissante.

Exercice 3 (7 points)

Soit f la fonction définie sur $]5;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3+4}{x-5}$

On appelle C_f la courbe représentative de f représentant la fonction f dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Partie A

On considère la fonction g définie sur **R** par $g(x) = 2x^3 - 15x^2 - 4$

1°) Déterminer les limites de g en $-\infty$ puis en $+\infty$.

2°) a) Calculer la dérivée de la fonction g .

b) Dresser le tableau de variation de g.

3°) Démontrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution réelle α sur **R**

puis que $\alpha \in [7\,;8]$.

4°) A l'aide de la calculatrice donner un encadrement à 10^{-2} près de α.

5°) Donner dans un tableau le signe de $g(x)$ sur R.

Partie B

On rappelle que la fonction f est définie sur $]5;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x^3+4}{x-5}$

1°) a) Calculer la limite de f à droite en 5.

b) Que peut-on en déduire pour la courbe C_f de f ?

2°) Calculer la dérivée $f'(x)$ de f et montrer que $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-5)^2}$.

3°) On admet que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que $f(\alpha) \approx 170{,}34$

Dresser le tableau de variations de f

Rappels des formules de dérivation de première

Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	fonction dérivable sur
k (constante)	0	$\mathbb{R}$
x^n (avec $n \in \mathbb{N}^*$)	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec v ne s'annulant pas.