CONTROLE N°2 DE MATHS 1 H T SPE SB   CORRIGE

Exercice 1 (7 points)

Dans les questions suivantes ***entourer la solution exacte*** *parmi celles proposées.*

1 - $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{108}{3n^4} + \frac{19}{5n} - 6$

-6	+ ∞	0	108

2 - $\lim\limits_{n \to +\infty} 24 + 27n + \frac{12}{\sqrt{n}}$

24	+ ∞	- ∞	n

3 - $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{16n^2 + n + 20n^3}{n^3 + 4n^2 + 2023}$

+ ∞	0	4	20

4 - $\lim\limits_{n \to +\infty} -30n^6 + \frac{18}{n} + \frac{1}{50n^4} + n^7$

- 30	+ ∞	-∞	0

5 - $\lim\limits_{n \to +\infty} 4n^3 - n^5 + n + 300$

- ∞	304	4	+ ∞

6 - $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n}{1 - \frac{19}{21}}$

+ ∞	- ∞	10.5	0

7- Pour tout n de N*, $3n + 6 \leq U_n \leq 4n^2 + 6$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n =$

$4n^2+6$	+ ∞	3n + 6	6

Exercice 2 (7 points)

1°) $U_n = n^5 + 6n^3 + 2$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} n^5 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} 6n^3 + 2 = +\infty$ donc par somme $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$

2°) Soit Soit $V_n = \dfrac{n^2 - 3n}{5n^4 + 8}$

On a une indéterminée du type ∞ / ∞ .

On lève l'indéterminée en factorisant par le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur

$$V_n = \frac{n^2(1-\frac{3}{n})}{n^4(5+\frac{8}{n^4})} = \frac{1-\frac{3}{n}}{n^2(5+\frac{8}{n^4})}$$

comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-3}{n} = 0$ alors par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{3}{n} = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{8}{n^2} = 0$ alors par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 + \frac{8}{n^4} = 2$

Donc Par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(5 + \frac{8}{n^4}) = +\infty$

D'où Par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

3°) $W_n = 14^n - 11^n = 13^n(\frac{10^n}{13^n} - 1) = 13^n\left(\left(\frac{10}{13}\right)^n - 1\right)$

Comme $-1 < \frac{10}{13} < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{10}{13}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \left(\frac{10}{13}\right)^n\right) = 1$ par somme.

De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} 13^n = +\infty$ donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = +\infty$

4°) Pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}^*$, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$

Comme 3 >0 on a donc pour tout n de $\mathbb{N}^*$

$$-5 \leq 5\cos(n) \leq 5$$
$$-5 + 3 \leq 5\sin(n) + 3 \leq 5 + 3$$

soit encore comme n> 0

$$\frac{-2}{n} \leq \frac{5\cos(n)+3}{n} \leq \frac{8}{n}$$ et finalement

Soit $$\frac{-2}{n} - 2 \leq \frac{3\sin(n)+2}{n} - 2 \leq \frac{8}{n} - 2$$

b) (cos (n)) est une suite divergente. On va donc utiliser le théorème des gendarmes.

pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $\frac{-2}{n} - 2 \leq T_n \leq \frac{8}{n} - 2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2}{n} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{2}{n} - 2 = -2$

De même $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{8}{n} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{8}{n} - 2 = -2$

Alors d'après le théorème des gendarmes $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = -2$.

Exercice 3 (7 points)

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 4$ et pour tout entier naturel n ,

$U_{n+1} = \frac{7}{4}\sqrt{U_n} + \frac{15}{4}$

Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < U_n < 9$

Bonus : Montrer que la suite $U_n = \frac{3n+8}{5n+4}$ est majorée par 2 .

Initialisation : pour n=0 on a $U_0 = 4$

$0 < 4 < 9$ donc $0 < U_0 < 9$ et P_0 est vraie

Hérédité : On suppose que la propriété est vraie **pour un entier n** fixé c'est-à-dire
$0 < U_n \leq 9$
Notre objectif est de montrer qu'elle reste vraie au rang n+1 à savoir $0 < U_{n+1} < 9$.

Par hypothèse de récurrence on a $0 < U_n < 9$

donc , comme **la fonction racine carrée est strictement croissante sur R+**

$0 < \sqrt{U_n} < \sqrt{9}$ soit encore

comme $\frac{7}{4} > 0$

$0 < \frac{7}{4}\sqrt{U_n} < \frac{21}{4}$

$0 < \frac{15}{4} < \frac{7}{4}\sqrt{U_n} + \frac{15}{4} < \frac{21}{4} + \frac{15}{4}$

soit finalement : $0 < \frac{7}{4}\sqrt{U_n} + \frac{15}{4} < 9$

c'est-à-dire $0 < U_{n+1} < 9$

et la propriété est vraie au rang n+1.

Conclusion : P_n est vraie au rang 0, elle est héréditaire, on a démontré par récurrence que **pour tout entier n** $0 < U_n < \boldsymbol{U_{n+1}} < 9$

Bonus : Montrer que la suite $U_n = \frac{8n+5}{4n+3}$ est majorée par 2

Pour tout n de N

$U_n - 2 = \frac{8n+5}{4n+3} - 2 = \frac{8n+5-2(4n+3)}{2n+3} = \frac{8n+5-8n-6}{2n+3} = \frac{-1}{2n+3} < 0$