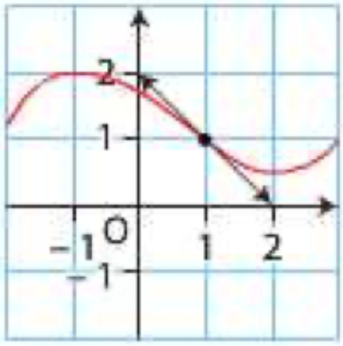
CONTROLE N°1 TRIMESTRE 2 DUREE 1 H Le 01 /12/2022 SB

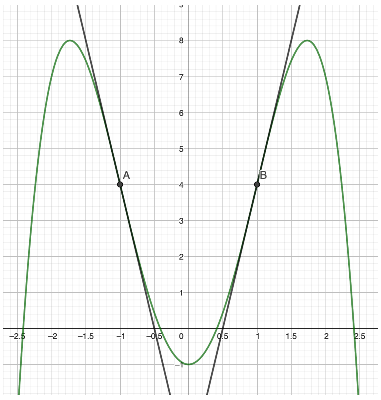
EXERCICE 1 : Dans chaque cas la fonction f dérivable sur I est définie par sa courbe dans un repère. Lire graphiquement les intervalles sur lesquels elle est convexe ou concave.

a) I = [-2 ;3]



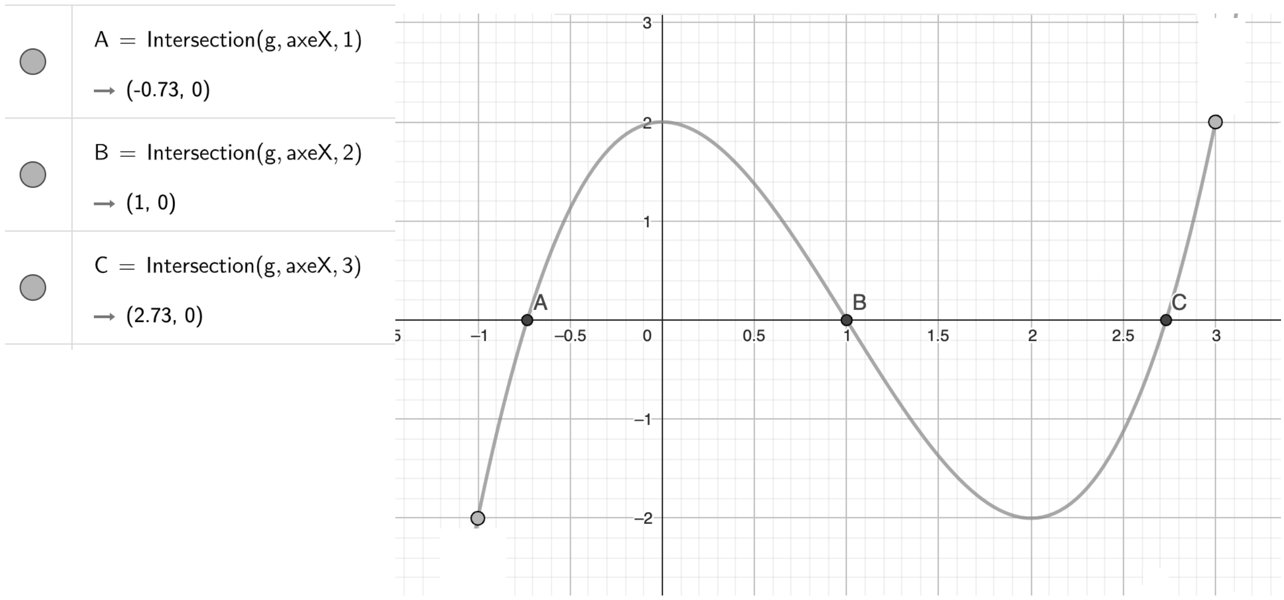
La courbe est au-dessus de ses tangentes sur $[1; 3]$ donc f est convexe sur $[1; -3]$
La courbe est en-dessous de ses tangentes sur $[-2; 1]$ donc f est concave sur $[-2; 1]$

b) I=[-2.5 ;2.5]



La courbe est au-dessus de ses tangentes sur $[-1; 1]$ donc f est convexe sur $[-1; 1]$
La courbe est en-dessous de ses tangentes sur $[-2,5; -1]$ et sur $[1; 2,5]$ donc f est concave sur $[-2,5; -1]$ et sur $[1; 2,5]$

<u>EXERCICE 2 :</u> Soit f la fonction définie et dérivable sur I = [-1; 3]. On a représenté ci-dessous la courbe de sa fonction dérivée f ’à l’aide d’un logiciel.



Par lecture graphique on justifiera les réponses aux questions suivantes :

1. Déterminer les variations de f sur I

Comme f ’(x) ≥ 0 si x $\in [-0.73; 1]$ et si x $\in [2.73; 3]$ alors f est croissante sur $[-0.73; 1]$ et sur $[2.73; 3]$
Comme f ’(x) ≤ 0 si x $\in [-1; -0,73]$ et si x $\in$ $[1; 2.73]$ alors f est décroissante sur $[-1; -0,73]$ et sur $[1; 2.73]$

2. Déterminer la convexité de f sur I.

Comme f’ est croissante sur $[-1;\ 0]$ et sur $[2; 3]$alors f est convexe sur $[-1;\ 0]$ et sur $[2; 3]$.
De plus comme f’ est décroissante sur $[0; 2]$ alors f est concave sur $[0; 2]$

3. La courbe de f admet-elle un ou des point(s) d’inflexion ? Déterminer l’abscisse du ou de chacun de ces point(s).

D’après le graphique f’ admet deux extrémums locaux en 0 et 2 ce qui montre que

f ’’ s’annule en 0 et 2 en changeant de signe alors la courbe de f admet 2 points d’inflexions d’abscisses respectives 0 et 2.

change de convexité au point d’abscisses 0 et 2 en traversant sa tangente alors la courbe de f admet 2 points d’inflexions d’abscisses respectives 0 et 2 .

EXERCICE 3 :Soit f la fonction définie sur R par f(x) = ($5x + 1$)e ^{5x} et Cf sa courbe représentative.
1°) Calculer la limite de f en + ∞ .

$\lim_{x\to+\infty} 5x =$ +∞
et $\lim_{X\to+\infty} e^X =$ +∞ donc par composition des limites $\lim_{x\to+\infty} e^{5x} =$ +∞

$\lim_{x\to+\infty} 5x+1 =$ + ∞

D'où finalement par produit des limites $\lim_{x\to+\infty} f(x) =$ +∞

2°) a) Après avoir développé l'expression de f(x) déterminer la limite de f en - ∞ .

Comme $f(\,x\,) \;=\; 5x\,e^{5x} \;+ e^{5x}$

$\lim_{x\to-\infty} 5x =$ - ∞
et $\lim_{X\to-\infty} e^X =$ 0 donc par composition des limites $\lim_{x\to-\infty} e^{5x} =$ 0

$\lim_{x\to-\infty} 5x =$ - ∞
et $\lim_{X\to-\infty} Xe^X =$ 0 par croissance comparée donc par composition des limites $\lim_{x\to-\infty} 5xe^{5x} =$ 0

D'où finalement par somme $\lim_{x\to-\infty} f(x) =$ 0

b) Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?

L'axe des abscisses d'équation y =0 est asymptote horizontale au voisinage de +∞

3°) a) On admet que f est deux fois dérivable sur R . Montrer que f '(x) = (10 + 25 x) e^{5x}

u(x) = 5x+1 u'(x)=5
v(x) = e^{5x} v'(x)= 6e^{5x} (uv)'=u'v+uv'

$f\,'(\,x\,) \;=\; 5\,e^{5x} \;+(5x \;+\; 1)(5\,e^{5x}) = \;(10 \;+\; 25x)\,e^{5x}$

b) Dresser le tableau de variations de f sur R

Comme e^{5x} >0 pour tout réel x alors $f'(x)$ est du signe de (10 + 25x) sur R :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{5}$		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	
f(x)	0	↘	$-e^{-2}$	↗	$+\infty$

$\boldsymbol{f(-\frac{2}{5}) = (5\times -\frac{2}{5} + 1)\, e^{5\times\frac{-2}{5}} = -e^{-2}}$

4°) a) Calculer f ''(x) .

u(x) = 10 +25x u'(x)=25

v(x) = e^{5x} v'(x)= 5e^{5x} (uv)'=u'v+uv'

$f''(x) = 25e^{6x} + (10 + 25x)(5\, e^{5x}) = (75 + 125x)\, e^{6x}$

b) Étudier la convexité de f et donner l'(les) abscisse(s) du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s)

Comme e^{6x} > 0 alors f ''(x) est du signe de $(75 + 125x)$ donc
Comme f ''(x) ≥ 0 si x ∈ $[-0.6;\ +\infty[$ alors f est convexe sur $[-0.6;\ +\infty[$
Comme f ''(x) ≤ 0 si x ∈ $]-\infty; -0.6]$ alors f est concave sur $]-\infty; -0.6]$
Comme f'' s'annule en changeant de signe en -0.6, la courbe de f admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse -0.6 de coordonnées (-0.6 ; $\frac{-2}{e^3}$) .

5°) a) Calculer la valeur exacte de $f(-0{,}6)$ *et de* $f'(-0.6)$

$\boldsymbol{f(-0{,}6) = \frac{-2}{e^3}}$ **et** $\boldsymbol{f'(-0.6) = \frac{-5}{e^3}}$

b) Déterminer une équation de la tangente T au point *d'abscisse* -0.6

T : y = f '(-0.6) (x +0.6) + f(-0.6)

T : y= $\frac{-5}{e^3}$ (x + 0.6) + $\frac{-2}{e^3}$

T : y = - $\frac{5}{e^3}x$ - $\frac{5}{e^3}$

6°) A l'aide du 4°)b) étudier la position relative de Cf et T.

Comme f est convexe sur $[-0.6;\ +\infty[$ alors la courbe Cf est au-dessus de ses tangentes sur $[-0.6;\ +\infty[$ donc en particulier la courbe Cf est au-dessus de T sur $[-0.6;\ +\infty[$.
Comme f est concave sur $]-\infty; -0.6]$ alors la courbe Cf est en-dessous de ses tangentes sur $]-\infty; -0.6]$ donc en particulier la courbe Cf est en -dessous de T sur $]-\infty; -0.6]$