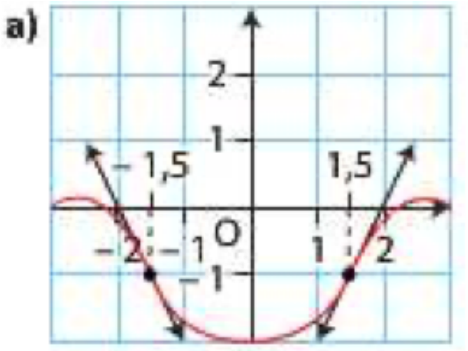
<u>CONTROLE N°1 TRIMESTRE 2 DUREE 1 H Le 01 /12/2022 SA</u>

<u>EXERCICE</u> 1 :Dans chaque cas la fonction f dérivable sur I est définie par sa courbe dans un repère. Lire graphiquement les intervalles sur lesquels elle est convexe ou concave.

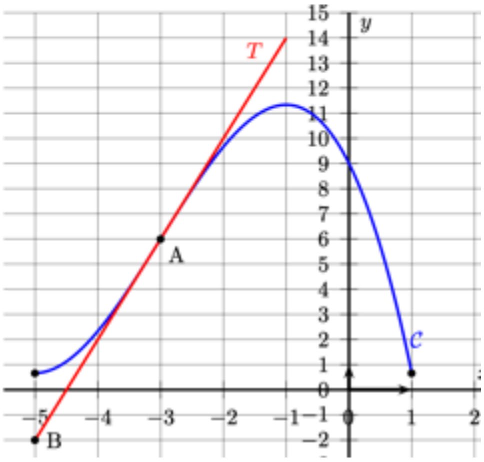
I = [-3 ;3]



La courbe est au-dessus de ses tangentes sur $[-1{,}5; 1{,}5]$ donc f est convexe sur $[-1{,}5; 1{,}5]$

La courbe est en-dessous de ses tangentes sur $[-3; -1{,}5]$ et sur $[1{,}5; 3]$ donc f est concave sur $[-3; -1{,}5]$ et sur $[1{,}5; 3]$

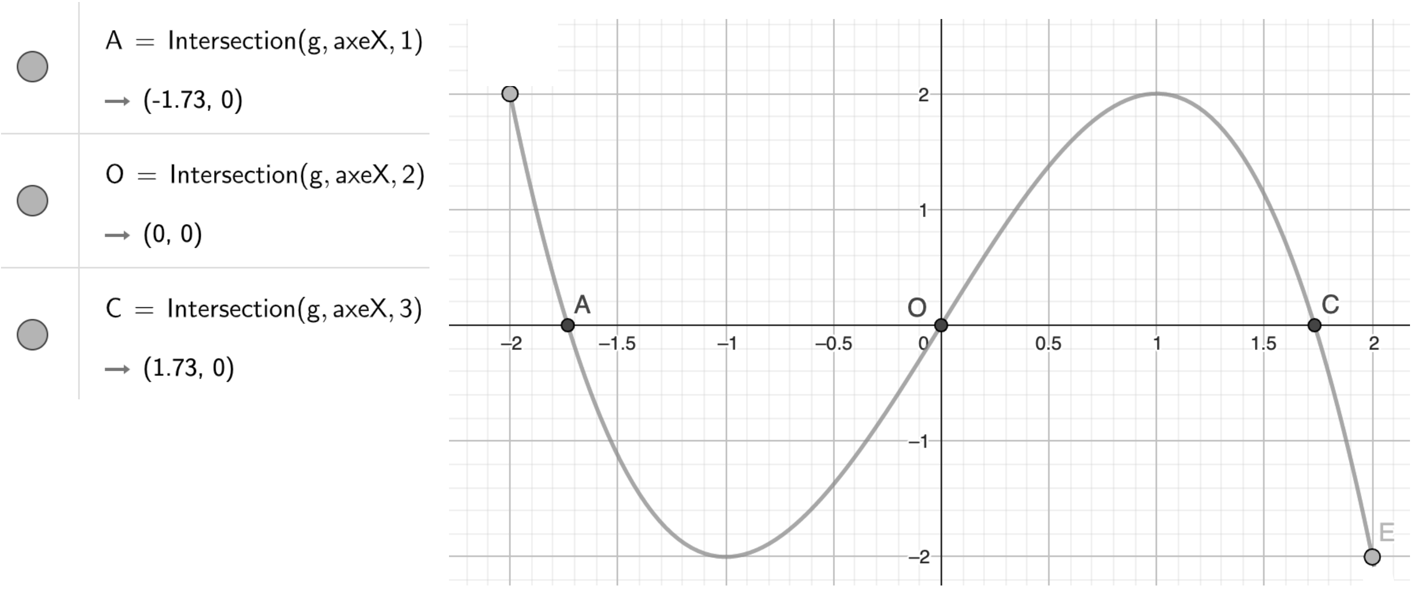
b) I=[-5 ;1]



La courbe est au-dessus de ses tangentes sur $[-5; -3]$ donc f est convexe sur $[-5; -3]$

La courbe est en-dessous de ses tangentes sur $[-3; 1]$ donc f est concave sur $[-3; 1]$

EXERCICE 2 : Soit f la fonction définie et dérivable sur I = [-2 ;2].
On a ci-dessous la courbe de sa fonction dérivée f ' grâce à un logiciel.



Par lecture graphique on justifiera les réponses aux questions suivantes :

1. Déterminer les variations de f sur I

Comme f '(x) ≥ 0 si x $\in [-2;\ -1.73]$ et si x $\in [0; 1.73]$ alors f est croissante sur $[-2;\ -1.73]$ et sur $[0; 1.73]$
Comme f '(x) ≤ 0 si x $\in [-1,73\ ;0]$ et sur $[1.73; 2]$ alors f est décroissante sur $[-1,73\ ;0]$ et sur $[1.73; 2]$.

2. Déterminer la convexité de f sur I.

Comme f' est croissante sur $[-1;\ 1]$ alors f est convexe sur $[-1;\ 1]$ .De plus comme f' est décroissante sur $[-2; -1]$ et sur $[1; 2]$alors f est concave sur $[-2; -1]$ et sur $[1; 2]$

3. La courbe de f admet-elle un ou des point(s) d'inflexion ? Déterminer l'abscisse ou les abscisses du ou de ces point(s).

f change de convexité au point d'abscisses -1 et 1 en traversant sa tangente alors la courbe de f admet 2 points d'inflexions d'abscisses respectives -1 et 1 .

D'après le graphique f' admet deux extrémums locaux en -1 et 1 ce qui montre que

f '' s'annule en -1 et 1 en changeant de signe alors la courbe de f admet 2 points d'inflexions d'abscisses respectives -1et 1.

EXERCICE 3 : Soit f la fonction définie sur R par $f(\,x\,) = (6x + 1)e^{6x}$ et Cf sa courbe représentative.

1°) Déterminer la limite de f en + ∞ .

$\lim_{x \to +\infty} 6x =$ +∞

et $\lim_{X \to +\infty} e^{X} =$ +∞ **donc par composition des limites** $\lim_{x \to +\infty} e^{6x} =$ +∞

$\lim_{x \to +\infty} 6x + 1 =$ + ∞

donc par produit des limites $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ +∞

2°) a) Après avoir développé l'expression de f(x) déterminer la limite de f en - ∞ .

Comme $f(x) = 6x\, e^{6x} + e^{6x}$

$\lim_{x \to -\infty} 6x =$ - ∞

et $\lim_{X \to -\infty} e^{X} =$ **0** **donc par composition des limites** $\lim_{x \to -\infty} e^{6x} =$ **0**

$\lim_{x \to -\infty} 6x =$ - ∞

et $\lim_{X \to -\infty} Xe^{X} =$ **0 par croissance comparée** **donc par composition des limites** $\lim_{x \to -\infty} 6xe^{6x} =$ **0**

Donc par somme $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ **0**

b) Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?

L'axe des abscisses d'équation y =0 est asymptote horizontale au voisinage de +∞

3°) a) On admet que f est deux fois dérivable sur R. Montrer que $f\,'(x) = (12 + 36x)\, e^{6x}$

u(x) = 6x+1 u'(x)=6
v(x) = e^{6x} **v'(x)= 6**e^{6x} **(uv)'=u'v+uv'**

$f\,'(x) = 6\, e^{6x} + (6x + 1)(6\, e^{6x}) = (12 + 36x)\, e^{6x}$

b) Dresser le tableau de variations de f sur R

Comme e^{6x} >0 pour tout réel x alors $f'(x)$ est du signe de (12 +36x) sur R :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	
f(x)	0	$\searrow$	$-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

$\boldsymbol{f(-\frac{1}{3}) = (6\times -\frac{1}{3} + 1)\, e^{6\times\frac{-1}{3}} = -e^{-2}}$

4°) a) Calculer f ''(x) .

u(x) = 12 +36x   u'(x)=36
v(x) = e^{6x} v'(x)= $6e^{6x}$ (uv)'=u'v+uv'

$f''(x) = 36\,e^{6x} + (12 + 36x)(6\,e^{6x}) = (108 + 216x)\,e^{6x}$

b) Étudier la convexité de f et donner l'(les) abscisse(s) du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s).

Comme $e^{6x} > 0$ alors f ''(x) est du signe de $(108 + 216x)$ donc
Comme f ''(x) ≥ 0 si x $\in [-0.5;\ +\infty[$ alors f est convexe sur $[-0.5;\ +\infty[$
Comme f ''(x) ≤ 0 si x $\in]-\infty; -0.5]$ alors f est concave sur $]-\infty; -0.5]$
Comme f'' s'annule en changeant de signe en -0.5 , la courbe de f admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse -0.5 de coordonnées (-0.5 ; $\frac{-2}{e^3}$) .

5°) a) Calculer **la valeur exacte** de $f(-0{,}5)$ *et de* $f'(-0.5)$

$$\boldsymbol{f(-0{,}5) = \frac{-2}{e^3} \quad \text{et} \quad f'(-0.5) = \frac{-6}{e^3}}$$

b) Déterminer une équation de la tangente T au point *d'abscisse* -0.5

T : y = f '(-0.5) (x +0.5) + f(-0.5)

T : y= $\frac{-6}{e^3}$ (x + 0.5) + $\frac{-2}{e^3}$

T : y = - $\frac{6}{e^3}x$ - $\frac{5}{e^3}$

6°) A l'aide du 4°)b) étudier la position relative de Cf et T.

Comme f est convexe sur $[-0.5;\ +\infty[$ alors la courbe Cf est au-dessus de ses tangentes sur $[-0.5;\ +\infty[$ donc en particulier la courbe Cf est au-dessus de T sur $[-0.5;\ +\infty[$.
Comme f est concave sur $]-\infty; -0.5]$ alors la courbe Cf est en-dessous de ses tangentes sur $]-\infty; -0.5]$ donc en particulier la courbe Cf est en -dessous de T sur $]-\infty; -0.5]$