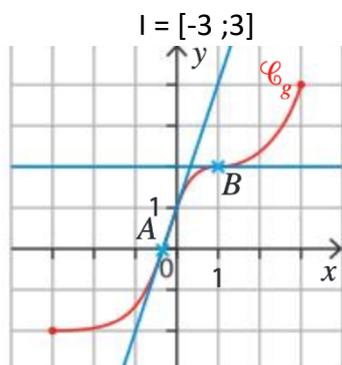


CONTROLE N°1 TRIMESTRE 2 DUREE 40 MN CORRIGE

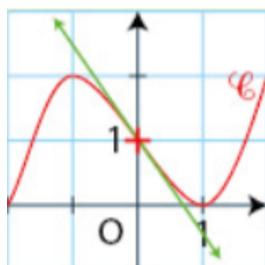
Le 16 /01/2023 SA

EXERCICE 1 : Dans chaque cas la fonction f dérivable sur I est définie par sa courbe dans un repère. Lire graphiquement les intervalles sur lesquels elle est convexe ou concave.



La courbe est au-dessus de ses tangentes sur $[-3; -0.3]$ et sur $[1; 3]$ donc f est convexe sur $[-3; -0.3]$ et sur $[1; 3]$. La courbe est en-dessous de ses tangentes sur $[-0.3; 1]$ donc f est concave sur $[-0.3; 1]$

b) $I = [-2; 2]$

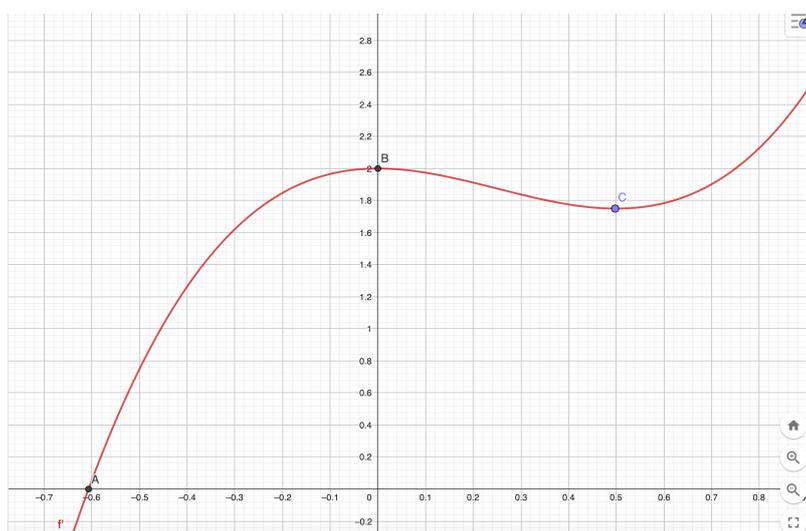


La courbe est au-dessus de ses tangentes sur $[0; 2]$ donc f est convexe sur $[0; 2]$. La courbe est en-dessous de ses tangentes sur $[-2; 0]$ donc f est concave sur $[-2; 0]$

EXERCICE 2 : Soit f la fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} .

On a ci-dessous la courbe de sa fonction dérivée f' grâce à un logiciel.

<input type="radio"/>	$A = \text{Intersection}(f', \text{axeX}, 1)$ $= (-0.61, 0)$
<input type="radio"/>	$B = \text{Intersection}(f', \text{axeY}, 1)$ $= (0, 2)$
<input checked="" type="radio"/>	$C = \text{Point}(f')$ $= (0.5, 1.75)$



Par lecture graphique on justifiera les réponses aux questions suivantes :

1. Déterminer les variations de f sur \mathbb{R}

Comme $f'(x) \leq 0$ si $x \in]-\infty; -0.61]$ alors f est décroissante sur $]-\infty; -0.61]$

Comme $f'(x) \geq 0$ si $x \in [-0.61; +\infty[$ alors f est croissante sur $[-0.61; +\infty[$

2. Déterminer la convexité de f sur \mathbb{R} .

Comme f' est décroissante sur $[0; 0.5]$ alors f est concave sur $[0; 0.5]$. De plus comme f' est croissante sur $]-\infty; 0]$ et sur $[0.5; +\infty[$ alors f est convexe sur $]-\infty; 0]$ et sur $[0.5; +\infty[$.

3. La courbe de f admet-elle un ou des point(s) d'inflexion ? Déterminer l'abscisse ou les abscisses du ou de ces point(s).

D'après le graphique f' admet deux extrémums locaux en 0 et 0.5 ce qui montre que

f'' s'annule en 0 et 0.5 en changeant de signe alors la courbe de f admet 2 points d'inflexions d'abscisses respectives 0 et 0.5.

EXERCICE 3 : Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = (2x - 3)e^x$ et Cf sa courbe représentative.

1°) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - 3 = +\infty$$

Donc par produit des limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2°) a) Après avoir développé l'expression de $f(x)$ déterminer la limite de f en $-\infty$.

Comme $f(x) = 2x e^x - 3 e^x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \quad \text{donc par produit} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} -3e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \quad \text{par croissance comparée donc par produit} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x e^x = 0$$

Par somme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

b) Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?

L'axe des abscisses d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$

3°) a) On admet que f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} . Montrer que $f'(x) = (2x - 1)e^x$

$$u(x) = 2x - 1 \quad u'(x) = 2$$

$$v(x) = e^x \quad v'(x) = e^x \quad (uv)' = u'v + uv'$$

$$f'(x) = 2e^x + (2x - 1)(e^x) = (2x - 1)e^x$$

b) Dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R}

Comme $e^x > 0$ pour tout réel x alors $f'(x)$ est du signe de $(2x - 1)$ fonction affine de coefficient directeur 2 positif sur \mathbb{R} :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	0	$-2\sqrt{e}$	$+\infty$

4°) a) Calculer $f''(x)$.

$$u(x) = 2x - 1 \quad u'(x) = 2$$

$$v(x) = e^x \quad v'(x) = e^x \quad (uv)' = u'v + uv'$$

$$f''(x) = 2e^x + (2x - 1)(e^x) = (2x + 1)e^x$$

b) Étudier la convexité de f et donner l'(les) abscisse(s) du (ou des) point(s) d'inflexion éventuel(s).

Comme $e^x > 0$ alors $f''(x)$ est du signe de $(2x + 1)$ donc

Comme $f''(x) \geq 0$ si $x \in [-0.5; +\infty[$ alors f est convexe sur $[-0.5; +\infty[$

Comme $f''(x) \leq 0$ si $x \in]-\infty; -0.5]$ alors f est concave sur $] -\infty; -0.5]$

Comme f'' s'annule en changeant de signe en -0.5 , la courbe de f admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse -0.5 de coordonnées $(-0.5; \frac{-5}{\sqrt{e}})$.

5°) a) Calculer la valeur exacte de $f(1)$ et de $f'(1)$

$$f(1) = -e \text{ et } f'(1) = e$$

b) Déterminer une équation de la tangente T au point d'abscisse 1

$$T : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$T : y = e(x - 1) - e$$

$$T : y = ex - 2e$$

6°) A l'aide du 4°)b) étudier la position relative de C_f et T .

Comme f est convexe sur $[-0.5; +\infty[$ alors la courbe C_f est au-dessus de ses tangentes sur $[-0.5; +\infty[$ donc la courbe C_f est au-dessus de T tangente au point d'abscisse 1.