Étudier la convergence d'une suite

Énoncé 1

Étudier la convergence des suites définies pour tout naturel n par :

$$u_n = \frac{1}{n+1}, \quad v_n = n^2+1, \quad p_n = v_n u_n \quad \text{et} \quad q_n = \frac{n}{v_n}.$$

Solution

Suite (u_n) : La fonction f telle que $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ a pour limite 0 en $+\infty$; il en résulte que la suite (u_n) converge vers 0.

Suite (v_n) : La fonction g telle que $g(x) = x^2+1$ a pour limite $+\infty$ en $+\infty$; il en résulte que la suite (v_n) diverge vers $+\infty$.

Suite (p_n) : $p_n = \dfrac{n^2+1}{n+1}$. On pose $h(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$.

En factorisant x au numérateur et au dénominateur, on établit que $\lim\limits_{+\infty} h = +\infty$. Donc (p_n) diverge vers $+\infty$.

Suite (q_n) : $q_n = \dfrac{n}{n^2+1}$. On pose $k(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

$\lim\limits_{+\infty} k = 0$. Il en résulte que (q_n) converge vers 0.

Étudier la convergence d'une suite géométrique

Énoncé 1

Étudier la convergence des suites définies par :

$$u_n = \frac{2}{3^n}, \quad v_n = 3(\sqrt{2})^n, \quad w_n = \frac{(-3)^n}{5} \quad \text{et} \quad x_n = \sum_{p=0}^{n-1} u_p.$$

Solution

On remarque que (u_n), (v_n) et (w_n) sont des suites géométriques.

$$u_n = 2 \times \left(\frac{1}{3^n}\right) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n ;$$

comme $-1 < \dfrac{1}{3} < 1$, (u_n) converge vers 2×0 c'est-à-dire vers 0.

D'autre part, puisque $\sqrt{2} > 1$, (v_n) diverge vers $+\infty$.

Puisque $-3 < -1$, (w_n) diverge et n'a pas de limite.

Enfin, x_n est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\dfrac{1}{3}$. $x_n = 2\dfrac{1-q^n}{1-q}$ avec $q = \dfrac{1}{3}$. Cette raison étant comprise entre -1 et 1, q^n a pour limite 0, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 3$.

Énoncé 2

Étudier la convergence de la suite (v_n) définie pour tout n par $v_n = 2^{n+3} - 3^n$.

Solution

Lorsque n tend vers $+\infty$, 2^{n+3} et 3^n tendent vers $+\infty$ car $2 > 1$ et $3 > 1$.

On a donc une forme indéterminée « $\infty - \infty$ ».

Factorisons alors v_n en mettant 2^n en facteur.

$$v_n = 2^n \times 2^3 - 3^n = 2^n(8 - 3^n 2^{-n}), \text{ donc } v_n = 2^n \times [8 - (1{,}5)^n].$$

La limite de $[8 - (1{,}5)^n]$ est $-\infty$, car $(1{,}5)^n$ tend vers $+\infty$, l'autre facteur 2^n tend vers $+\infty$; il en résulte que (v_n) diverge vers $-\infty$.