EXERCICES CORRIGES SUR LES LIMITES DE SUITES

1. Limite de suites par opérations

Déterminer la limite des suites de terme général :

a) $u_n = 1{,}7^n$ n ; **b)** $v_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$; **c)** $w_n = \dfrac{5^n - 2^{n+1}}{5^{n+1} + 1}$.

méthode

• *On applique les théorèmes sur limites et opérations si ceux-ci permettent de conclure directement.*

• *En cas d'indétermination, on transforme l'expression du terme général de la suite en factorisant, ou en utilisant, en présence de radicaux, l'expression conjuguée si nécessaire.*

a) $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}7^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$; donc, par produit, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbf{1{,}7^n}$ .. $\mathbf{n = +\infty}$.

On vérifie que dans les deux cas suivants, l'application directe des théorèmes ne permet pas de conclure.

b) La mise en facteur de $\sqrt{n+2}$ ne permet pas non plus d'arriver directement à la conclusion.

Alors on écrit $v_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \dfrac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \dfrac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+2} = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$; donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n}\right) = +\infty$,

d'où, par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = 0$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) = \mathbf{0}$.

c) On écrit $w_n = \dfrac{5^n - 2^{n+1}}{5^{n+1} + 1} = \dfrac{5^n\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n 2\right]}{5^n\left[5 + \frac{1}{5^n}\right]} = \dfrac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n 2}{5 + \frac{1}{5^n}}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{2}{5}\right)^n = 0$, car $0 < \dfrac{2}{5} < 1$; donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^n e\right] = 1$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} 5^n = +\infty$; alors, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[5 + \dfrac{1}{5^n}\right] = 5$.

Ainsi, par quotient, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n e}{5 + \frac{1}{5^n}} = \dfrac{1}{5}$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\mathbf{5^n - 2^{n+1}}}{\mathbf{5^{n+1} + 1}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}$.

2. Limite de suites par comparaison

Étudier le comportement à l'infini des suites de terme général :

a) $x_n = \dfrac{(-1)^n + \sin n}{3^n}$; **b)** $y_n = \dfrac{n\,!}{n^2}$, **avec** $n \geqslant 1$;

méthode

- ***On compare les suites données à des suites de référence, dont on connaît la limite.***
- ***On applique les théorèmes de comparaison.***

a) Pour tout $n \geqslant 0$, $|(-1)^n + \sin n| \leqslant 1 + |\sin n| \leqslant 2$ et $\dfrac{1}{3^n} > 0$;

donc, pour tout $n \geqslant 0$, on peut écrire $|x_n| \leqslant 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$; donc, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{(-1)^n + \sin n}{3^n} = 0$.

b) Pour $n \geqslant 3$, on a $n\,! \geqslant n(n-1)(n-2)$; donc $\dfrac{n\,!}{n^2} \geqslant \dfrac{(n-1)(n-2)}{n}$,

c'est-à-dire, après développement, $y_n \geqslant n - 3 + \dfrac{2}{n}$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} (n-3) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n} = 0$; donc, par somme, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(n - 3 + \dfrac{2}{n}\right) = +\infty$.

Ce qui permet de conclure, par comparaison, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n\,!}{n^2} = +\infty$.

Rq :

$n! = n(n-1) \cdots 3 \times 2 \times 1$

Ex : $2! = 2 \times 1 = 2$

$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$