CORRIGES DES EXERCICES SIMPLES SUR LES COMPLEXES

ECRIRE UN NOMBRE COMPLEXE SOUS FORME ALGEBRIQUE

◆ **1.** $z_1 = (1+i)^2$

$= 1 + 2i + i^2$ or $i^2 = -1$

donc $z_1 = 2i$.

◆ **2.** $z_2 = (2+3i)(1-i)$

$= 2 - 2i + 3i - 3i^2$

$= 2 - 2i + 3i + 3$

donc $z_2 = 5 + i$.

Pour écrire z_3 sous sa forme algébrique, il faut multiplier le dénominateur par son conjugué pour rendre le dénominateur réel. En effet $(1-i)(1+i) = 1 - i^2 = 2$.

◆ **3.** $z_3 = \dfrac{1+2i}{1-i} = \dfrac{1+2i}{1-i} \times \dfrac{1+i}{1+i}$

$= \dfrac{1+i+2i+2i^2}{1-i^2} = \dfrac{1+i+2i-2}{1+1}$

donc $z_3 = \dfrac{-1+3i}{2}$.

◆ **4.** $z_4 = (1+i)^4$.

On a calculé précédemment $(1+i)^2 = 2i$

donc $z_4 = (2i)^2 = 4i^2$

donc $z_4 = -4$.

CALCULER LE MODULE D'UN NOMBRE COMPLEXE

◆ **1.** $|z_1| = |2i| = |0 + 2i| = \sqrt{0^2 + 2^2}$,
donc $|z_1| = 2$.

1re méthode : $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

◆ **2.** $|z_2| = \left|\frac{1+2i}{1-i}\right| = \frac{|1+2i|}{|1-i|}$.

Or, $|1+2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

et $|1-i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$,

donc $|z_2| = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

2e méthode : (plus longue) on écrit d'abord z_2 sous sa forme algébrique.

$z_2 = \frac{1+2i}{1-i} = \frac{-1+3i}{2}$ (calculé dans l'exercice type n°1, z_3),

donc $|z_2| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ $|z^n| = |z|^n$.

◆ **3.** $|z_3| = \left|\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^3\right| = \left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right|^3$.

Or, $\left|\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right| = \frac{|1+i\sqrt{3}|}{|1+i|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$,

donc $||z_3| = (\sqrt{2})^3$,

RESOUDRE UNE EQUATION DU PREMIER DEGRE DANS C

◆ **1.** $(E_1) \Leftrightarrow (2-i)\,z = 10 + 5i$

$\Leftrightarrow z = \frac{10+5i}{2-i}$ (car $2 - i \neq 0$).

Transformez la solution pour l'écrire sous forme algébrique avant de vérifier.

$\frac{10+5i}{2-i} = \frac{(10+5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{15+20i}{5} = 3 + 4i$,

donc $z = 3 + 4i$.

$S = \{3 + 4i\}$.

◆ **2.** $(E_2) \Leftrightarrow (3-2i)\,(4+i) - i = z + iz$

$\Leftrightarrow z(1+i) = 14 - 6i$

$\Leftrightarrow z = \frac{14-6i}{1+i}$ (car $1 + i \neq 0$).

Transformez la solution pour l'écrire sous forme algébrique.

$\frac{14-6i}{1+i} = \frac{(14-6i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{8-20i}{2} = 4 - 10i$,

donc $z = 4 - 10i$.

$S = \{4 - 10i\}$.

RESOUDRE UN SYSTEME DANS C

Il est préférable de résoudre le système par substitution.

$$\begin{cases} 2iz - z' = 1 + 2i \\ z + (1+i)\,z' = 2 - 3i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z' = 2iz - 1 - 2i \\ z + (1+i)\,(2iz - 1 - 2i) = 2 - 3i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z' = 2iz - 1 - 2i \\ (-1 + 2i)\,z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z' = 2iz - 1 - 2i \\ z = \dfrac{1}{-1+2i} \end{cases} \quad (\text{car } -1 + 2i \neq 0).$$

Écrivez $\dfrac{1}{-1+2i}$ sous forme algébrique.

$$\frac{1}{-1+2i} = \frac{1\,(-1-2i)}{(-1+2i)\,(-1-2i)} = \frac{-1-2i}{5},$$

donc $z = \dfrac{-1-2i}{5}$.

Or, $z' = 2iz - 1 - 2i$

donc $z' = \dfrac{2i\,(-1-2i)}{5} - 1 - 2i = \dfrac{-1-12i}{5}$

donc $\begin{cases} z = \dfrac{-1-2i}{5} \\ z' = \dfrac{-1-12i}{5} \end{cases}$ est la solution du système.

RESOUDRE UNE EQUATION AVEC UN CONJUGUE DANS C

Vous pouvez poser z = x + iy où x et y sont des réels.

$$z = x + iy \Rightarrow \begin{cases} z^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2 = x^2 - y^2 + 2ixy \\ \overline{z} = x - iy \end{cases}$$

donc (E) $\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = (x + iy)\,(x - iy)$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2ixy = x^2 + y^2$

$\Leftrightarrow -2y^2 + 2ixy = 0$

$\Leftrightarrow 2y\,(-y + ix) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ \text{ou} \\ -y + ix = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{ou} \\ x = y = 0 \end{cases}$$

si $y = 0$, z est un réel

si $x = y = 0$, $z = 0$ qui est un réel

donc $S = \mathbb{R}$

Vous pouvez aussi factoriser l'expression.

(E) $\Leftrightarrow z\,(z - \overline{z}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \text{ou} \\ z - \overline{z} = 0 \end{cases}$

or $z - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$

or $z = \overline{z}$ si z et $\overline{z}$ n'ont pas de partie imaginaire donc si z est un réel

$S = \mathbb{R}$

DETERMINER UN ENSEMBLE DE POINTS DU PLAN COMPLEXE

Vous ne pouvez pas déterminer la partie réelle et la partie complexe de $(z^2 + 2z - 3)$ sans écrire z dans sa forme algébrique $z = x + iy$ où x et y sont des réels.

◆ **1.** $z = x + iy \Rightarrow z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy + i^2y^2$
$= x^2 - y^2 + 2ixy,$

donc $z^2 + 2z - 3 = (x^2 - y^2 + 2x - 3) + i\ (2xy + 2y)$;
donc $z^2 + 2z - 3$ est un réel ssi $2xy + 2y = 0$

$$\Leftrightarrow 2y\ (x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \text{ou} \\ x + 1 = 0. \end{cases}$$

Dans le plan complexe, l'ensemble des points M(x, y) tels que $y = 0$ est l'axe des réels et l'ensemble des points M(x, y) tels que $x + 1 = 0$ est la droite d'équation $x = -1$;

donc (E) est la réunion des droites d'équation $y = 0$ et $x = -1$.

◆ **2. Méthode algébrique**

On pose $z = x + iy \Rightarrow z - 2i = x + i\ (y - 2)$,

donc $|z - 2i| = \sqrt{x^2 + (y-2)^2}$,

donc $|z - 2i| = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 3$
$\Leftrightarrow x^2 + (y - 2)^2 = 9.$

Ceci est l'équation du cercle de centre (0, 2) et de rayon 3,
donc (E) est le cercle de centre (0, 2) et de rayon 3.

Ici la méthode géométrique est plus performante.

Méthode géométrique

Soit A le point d'affixe $2i$, $|z - 2i| = \mathrm{AM}$,
donc $|z - 2i| = 3 \Leftrightarrow \mathrm{AM} = 3$.
$\Leftrightarrow$ M appartient au cercle de centre A et de rayon 3.

POUR S'ENTRAINER

EXERCICE N°1

◆ **1.** $3^3 - 4 \times 3^2 + (4+i) \times 3 - 3 - 3i = 27 - 36 + 12 + 3i - 3 - 3i = 0$
donc **3 est solution de (E).**

$i^3 - 4i^2 + (4+i) \times i - 3 - 3i = -i + 4 + 4i + i^2 - 3 - 3i = 0,$
donc *i* **est solution de (E).**

◆ **2.** Soit α la 3^e^ solution de (E) si elle existe
$(z-3)\ (z-i)\ (z-\alpha) = (z^2 - iz - 3z + 3i)\ (z-\alpha)$
$= z^3 + (-\alpha - 3 - i)\ z^2 + (i\alpha + 3\alpha + 3i)\ z - 3\alpha i.$

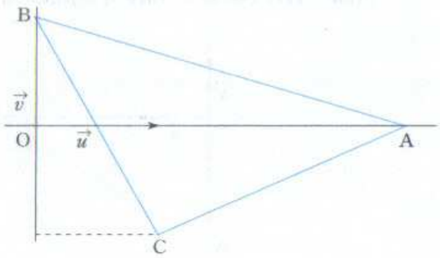
En procédant par identification, on obtient pour tout complexe z :
$(z-3)\ (z-i)\ (z-\alpha) = z^3 - 4z^2 + (4+i)\ z - 3 - 3i$ ssi

$$\begin{cases} -\alpha - 3 - i = -4 \\ i\alpha + 3\alpha + 3i = 4 + i \\ -3\alpha i = -3 - 3i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - i \\ \alpha(3+i) = 4 - 2i \\ i\alpha = 1 + i \end{cases}$$

En remplaçant α par $1-i$ dans la deuxième et la troisième équation du système ces deux équations sont vérifiées, donc $1-i$ est solution du système
donc (E) $\Leftrightarrow (z-3)\ (z-i)\ (z-(1-i)) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 3 \\ \text{ou} \\ z = i \\ \text{ou} \\ z = 1 - i \end{cases} \qquad \mathbf{S} = \{3,\ i,\ 1-i\}.$$

▶ **3.**
Soit A l'image de 3
B l'image de i
C l'image de $(1-i)$



◆ **4.** $AB = |i - 3| = \sqrt{10}$

$AC = |(1-i) - 3| = |-2 - i| = \sqrt{5}$

$BC = |(1-i) - i| = |1 - 2i| = \sqrt{5}$

donc AC = BC
et $AC^2 + BC^2 = AB^2$
donc **ABC est un triangle rectangle isocèle en C.**

EXERCICE N°2

◆ **1.** Posons $z = x + iy \Rightarrow \begin{cases} z + 2i = x + i\,(2+y) \Rightarrow |z+2i| = \sqrt{x^2 + (2+y)^2} \\ z - 3 = x - 3 + iy \Rightarrow |z-3| = \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \end{cases}$

donc (E) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (2+y)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$

$\Leftrightarrow x^2 + 4 + 4y + y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2$

$\Leftrightarrow 6x + 4y - 5 = 0$

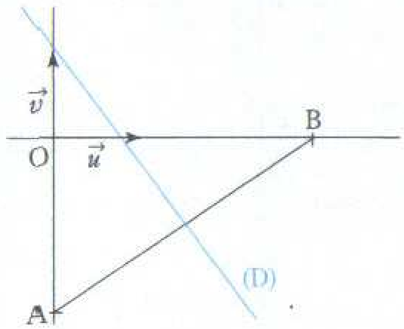
$\Leftrightarrow y = \dfrac{-6x+5}{4}$

donc les solutions de (E) sont les complexes dont la forme algébrique $x + iy$ est telle que $y = \dfrac{-6x+5}{4}$

donc $\mathbf{S} = \left\{ x + i\left(\dfrac{-6x+5}{4}\right),\quad x \in \mathbb{R} \right\}$.

(D) est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $6x + 4y - 5 = 0$.
Cette équation est l'équation d'une droite

donc **(D) est la droite d'équation $6x + 4y - 5 = 0$.**



◆ **2.** $|z + 2i| = |z - (-2i)| = AM$

$|z - 3| = BM$

donc $|z + 2i| = |z - 3|$ ssi $AM = BM$ donc ssi M appartient à la médiatrice de [AB]

donc **(D) est la médiatrice de [AB].**

EXERCICE N°3

◆ **1.** Posons $z = x + iy$ donc $z' = \dfrac{(x-4)+iy}{(x+6)+iy}$

soit $z' = \dfrac{\left[(x-4)+iy\right]\left[(x+6)-iy\right]}{\left[(x+6)+iy\right]\left[(x+6)-iy\right]}$

$$= \frac{(x-4)\ (x+6) - iy\ (x-4) + iy\ (x+6) + y^2}{(x+6)^2 + y^2}$$

$$= \frac{(x^2 + 2x - 24 + y^2) + 10yi}{(x+6)^2 + y^2}$$

donc si x' et y' sont les parties réelles et imaginaires de z'

$$x' = \frac{x^2 + 2x - 2y + y^2}{(x+6)^2 + y^2} \quad \text{et} \quad y' = \frac{10y}{(x+6)^2 + y^2}$$

◆ **2.** z' est un imaginaire pur ssi $x' = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x - 2 + y^2}{(x+6)^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 2 + y^2 = 0 \\ (x+6)^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 + y^2 = 25 \\ (x, y) \neq (-6, 0) \end{cases}$$

Or $(x+1)^2 + y^2 = 25$ est l'équation du cercle de centre $\Omega(-1, 0)$ et de rayon 5.
Le point $A(-6, 0)$ appartient à ce cercle mais $A \notin (E)$

donc **(E) est le cercle de centre Ω d'affixe -1 et de rayon 5 privé du point A d'affixe -6.**