PREPARATION DU CONTROLE DU 12/10/09
CORRECTION DES EXERCICES SUR LES COMPLEXES

1 **1°** V, par définition. **2°** V.

3° V. **4°** F. $2-\frac{5}{3}i$ n'est pas réel.

2 **1°** V. M et M' sont symétriques par rapport à (Ox) .

2° V. $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM}'$, $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM}'$ ayant respectivement pour affixes z et $\bar{z}$.

3° F. $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{M'M}$, $\overrightarrow{M'M}$ ayant pour affixe $z-\bar{z}$.

4° V. $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{OM}'$ et $-2\overrightarrow{OM}'$ a pour affixe $-2\bar{z}$.

3 **1°** V.

2° F. $z_{\overrightarrow{BC}}=\left(\frac{1}{2}-2i\right)-(-2-i)=\frac{5}{2}-i$.

3° F. $ABCD$ parallélogramme

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$ $\Leftrightarrow$ $z_D=z_{\overrightarrow{BA}}+z_C$

$z_D=\frac{3}{2}$.

4 1° V. $z + z' = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$.

2° V.

3° F. $\frac{1}{z} = \frac{1}{3+i} = \frac{3-i}{3^2+1^2} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$.

5 1° $z_E = 2 + i$; $z_F = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$; $z_G = 2i$; $z_H = -2 + 2i$ et $z_K = -1 - i$.

2° $z_{\overrightarrow{OF}} = z_F = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$;

$z_{\overrightarrow{GE}} = (2 + i) - (2i) = 2 - i$; $z_{\overrightarrow{KG}} = 1 + 3i$;

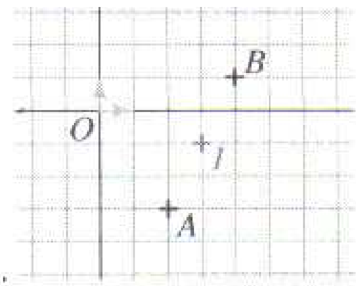
$z_{\overrightarrow{KH}} = -1 + 3i$.

7 1° $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

donc $z_{\overrightarrow{OI}} = \frac{1}{2}(z_{\overrightarrow{OA}} + z_{\overrightarrow{OB}})$,

soit $z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B)$.

2° $z_I = 3 - i$.



8 D'après le théorème de réduction de sommes vectorielles (vu en Première), si on note G le barycentre cherché, pour tout point M du plan :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MG} .$$

En prenant pour M le point O, origine du repère, on obtient :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) ,$$

d'où :

$$z_G = \frac{1}{4}(z_A + z_B + z_C + z_D) = 3 - i .$$

9 **1° a)** $\overrightarrow{CC'} = 2\overrightarrow{CD}$, donc :

$$z_{C'} = 2z_{\overrightarrow{CD}} + z_C = -7 - \mathrm{i} \ .$$

b) $z_{A'} = z_{\overrightarrow{DB}} + z_{\overrightarrow{DC}} + z_D$

$= z_B - z_D + z_C = 9 - \mathrm{i}$.

2° $z_{\overrightarrow{C'D}} = z_{\overrightarrow{BA'}} = 5 + 2\mathrm{i}$, donc $A'BC'D$ est un parallélogramme.

10 $z_1 = -1 + 2\mathrm{i}$; $z_2 = 39 + 13\mathrm{i}$;

$z_3 = -\dfrac{5}{2} - 2\mathrm{i}$; $z_4 = -\dfrac{11}{4} - \dfrac{5}{4}\mathrm{i}$.

11 $z_1 = (2 + \sqrt{3}) + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 2)$;

$z_2 = -21 + 20\mathrm{i}$; $z_3 = -\dfrac{35}{4} + 3\mathrm{i}$; $z_4 = 25$.

12 $z_1 = \dfrac{11}{3} + \dfrac{47}{3}\mathrm{i}$; $z_2 = 0$;

$z_3 = 10 - 16\mathrm{i}$; $z_4 = 44 + 117\mathrm{i}$;

$z_5 = 41 + 13\mathrm{i}$.

13 $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$; $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{3}}{7} + \dfrac{2}{7}\mathrm{i}$;

$\dfrac{1}{z_3} = \dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{1}{z_4} = -\dfrac{2}{53} + \dfrac{7}{53}\mathrm{i}$.

14 On veut écrire les nombres sous forme algébrique.

$z_1 z_2^2 = 78 + 52\mathrm{i}$; $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{7}{26} + \dfrac{17}{26}\mathrm{i}$;

$\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{7}{13} - \dfrac{17}{13}\mathrm{i}$; $\dfrac{z_1 - 1}{z_2 - 4\mathrm{i}} = -\dfrac{1}{5} + \dfrac{2}{5}\mathrm{i}$.

6 1° $z_A = 1 - 3i$, $z_B = 4 + 5i$

et $z_C = -3 + 2i$.

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 3 + 8i$, de la même façon :

$z_{\overrightarrow{AC}} = -4 + 5i$ et $z_{\overrightarrow{BC}} = -7 - 3i$.

2° $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\Longleftrightarrow z_D - z_A = 2z_{\overrightarrow{AB}} + z_{\overrightarrow{AC}}$

$\Longleftrightarrow z_D = 2(3 + 8i) + (-4 + 5i) + 1 - 3i$

$\Longleftrightarrow z_D = 3 + 18i$.

En raisonnant de manière identique, $z_E = \frac{5}{3} + 4i$.

3° On a $z_{\overrightarrow{AD}} = 2 + 21i$ et $z_{\overrightarrow{AE}} = \frac{2}{3} + 7i$,

donc $z_{\overrightarrow{AD}} = 3z_{\overrightarrow{AE}}$. On en déduit :

$\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AE}$ et A, D, E sont alignés.

15 $z_1 = \frac{8i - 1}{2 - 3i} = \frac{(8i - 1)(2 + 3i)}{4 + 9}$

$= \frac{-26 + 13i}{13} = -2 + i$.

$z_2 = 2i + \frac{5}{i} = 2i - 5i = -3i$.

$\frac{1 + i}{2 - i} = \frac{(1 + i)(2 + i)}{5} = \frac{1 + 3i}{5}$;

donc $z_3 = \frac{(1 + 3i)^2}{25} = -\frac{8}{25} + \frac{6}{25}i$.

$\frac{4 - i}{2 + i} = \frac{7}{5} - \frac{6}{5}i$, $\frac{i}{3 + i} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$;

donc $z_4 = \frac{3}{2} - \frac{9}{10}i$.