CORRECTION DES EXERCICES SUR LES PROBABILITES

Exercices 1 à 6 p 272 et 10 à 31 p 273 et 37 à 40 p274 et 50 à 55 p 276

1 $\binom{32}{8}$.

2 $A=\left(\frac{3}{2}\right)^n$ et $B=\left(\frac{13}{4}\right)^n$.

3 **1.** $p(B)=\frac{5}{12}$.

2. $p(N)=\frac{4}{13}$; $p(R)=\frac{7}{13}$; $p(B')=\frac{2}{13}$.

3. $\frac{5}{78}$.

4 **1.** La loi binomiale.

2. $E(X)=3$; $\sigma(X)=\sqrt{1,2}$.

3. $p(A)=(0,4)^5$ $p(B)=1-0,4^5$.

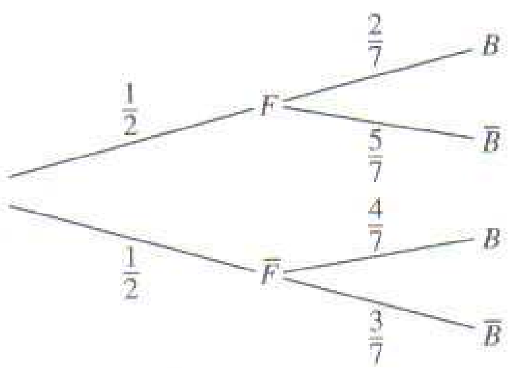
5 $p(A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$; $p_A(B)=\frac{3}{8}$; $p(A\cap B)=\frac{1}{4}$.

6 **1.** $p(F)=p(\overline{F})=\frac{1}{2}$.

2. $p_F(B)=\frac{2}{7}$ et $p_F(\overline{B})=\frac{5}{7}$.

3. $p_{\overline{F}}(B)=\frac{4}{7}$ et $p_{\overline{F}}(\overline{B})=\frac{3}{7}$.

4.



5. $p(B)=\frac{3}{7}$.

10 **a.** 56 ; **b.** 55 ; **c.** 12 ; **d.** $\frac{4}{12!}(1-12+12\times 11)=\frac{4}{12!}\times 121$.

11 **a.** $\frac{1}{n+1}$; **b.** $(2n+1)2n$;

c. $\frac{1}{(n+1)!}(n(n+1)-1)=\frac{n^2+n-1}{(n+1)!}$; **d.** $(n-1)!-(n-1)!=0$.

12 **a.** $\frac{9!}{4!}$; **b.** $\frac{n!}{(n-3)!}$; **c.** $\frac{12!}{7!}\times\frac{4!}{8!}$; **d.** $\frac{11!}{2^{10}\times 5!^2}$.

13 $\frac{4}{7}$ et $\frac{24}{91}$.

14 $\frac{n+1}{n}$ et $\frac{n(p+1)}{(n-p)(n-p-1)}$.

15 $\binom{32}{2}=496$.

16 $\binom{49}{6}=13\ 983\ 816$.

17 $\binom{52}{13}$.

18 $\binom{86}{4}\times\binom{234}{5}$.

19 $\binom{31}{5}=169\ 911$.

20 **1.** **a.** $\binom{8}{5}$; **b.** 0.

2. **a.** 4^6 ; **b.** $7\times\binom{4}{3}\times\binom{28}{2}$; **c.** $7\times\binom{4}{2}\times\binom{28}{3}$; **d.** $7\times 6\times\binom{4}{3}\times\binom{4}{2}$.

21 **a.** $\binom{7}{3}\times\binom{4}{2}\times\binom{2}{2}$; **b.** $3!$; **c.** $\binom{5}{2}3!$; **d.** $6!$; **e.** $\binom{8}{3}\times\binom{5}{2}\times 3!$.

22 **a.** $1+2\times 4+\binom{4}{2}\times 2=21$; **b.** 15 ; **c.** 84.

23 $\binom{6}{2}+6=21$.

24 **a.** 21 ; **b.** 56 ; **c.** 50.

25 **a.** $\frac{1}{35}$; **b.** $\frac{8\times 7}{6}=\frac{28}{3}$; **c.** $\frac{4\times 7\times 7\times 3}{7}=84$.

26 **a.** $n(n-1)=72$, $n^2-n-72=0$;

b. $\frac{n(n-1)}{2}=\frac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$;

c. $9\times\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=14\ \frac{n(n-1)}{2}$.

27 **a.** $\frac{2n(n-1)(n-2)}{6}=21n$;

b. $\frac{24n(n-1)}{2}=\frac{91(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$; **c.** $\frac{n(n-1)}{2}=780$.

28 **a.** $(1+x)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$;

b. $(2-x)^5 = -x^5 + 10x^4 - 40x^3 + 80x^2 - 80x + 32$;

c. $(2x+1)^6 = 64x^6 + 192x^5 + 240x^4 + 160x^3 + 60x^2 + 12x + 1$.

29 **a.** $\left(\frac{1}{3}+x\right)^5 = \frac{1}{243} + \frac{5}{81}x + \frac{10}{27}x^2 + \frac{10}{9}x^3 + \frac{5}{3}x^4 + x^5$;

b. $(-x+2y)^5 = -x^5 + 10x^4y - 40x^3y^2 + 80x^2y^3 - 80xy^4 + 32y^5$;

c. $\left(3x - \frac{1}{3}y\right)^4 = 81x^4 - 36x^3y + 6x^2y^2 - \frac{4}{9}xy^3 + \frac{1}{81}y^4$.

30 $(2-\mathrm{i})^7 = -278 + 29\mathrm{i}$; $(2+\mathrm{i})^7 = -278 - 29\mathrm{i}$;

$(2-\mathrm{i})^7 + (2+\mathrm{i})^7 = -556 \in \mathbb{R}$.

32 **1.** 10^9. **2.** **a.** $10^9 - \left(9^9 - \binom{9}{1}9^8 - \binom{9}{2}9^7\right)$;

b. $\binom{9}{2} \times 9^7$; **c.** $\binom{9}{2} \times \binom{7}{1} \times 8^6$; **d.** $\binom{9}{3} \times \binom{6}{2} \times \binom{4}{1} \times 7^3$.

3. 8^9.

33
$$3 \times (2^6 - 2) + 3 + \binom{6}{1}\left[\binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{5}{4}\right]$$
$$+ \binom{6}{2}\left[\binom{4}{1} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3}\right]$$
$$+ \binom{6}{3}\left[\binom{3}{1} + \binom{3}{2}\right]$$
$$+ \binom{6}{4}\binom{2}{1} = 729 .$$

34 **1.** $\binom{64}{6}$. **2.** $\binom{32}{6}$. **35** $\frac{18!}{5!}$.

36 **1.** $\binom{4}{2} = 6$. **2.** $\binom{7}{4} = 35$. **3.** $\binom{11}{5} = 462$.

4. $\binom{7}{4} \times \binom{4}{1} = 140$. **5.** $\binom{4}{2} \times \binom{3}{2} \times \binom{4}{1} = 72$.

39 **1.** Il y a 36 dominos.

2. **a.** La probabilité est de $\frac{5}{18}$.

b. La probabilité est de $\frac{5}{9}$.

3. L'univers Ω est l'ensemble de tous les sous-ensembles à 2 éléments parmi les 36 dominos. En effet on tire simultanément 2 dominos parmi 36 donc : $\mathrm{card}(\Omega) = C_{36}^2 = 360$ possibilités.

Soit D l'événement : « obtenir 1 domino double et 1 domino simple dont l'un des chiffres est celui du domino double ».

Il y a 8 dominos doubles. Pour 1 domino double donné (ex. : 0 0), il y a 7 dominos simples dont l'un des chiffres est celui du domino double (0 1 ; 0 2 ; 0 3 ; 0 4 ; 0 5 ; 0 6 et 0 7). Ce qui nous fait $8 \times 7 = 56$ cas favorables à l'événement D.

Donc $\text{card}(D) = 56$.

Nous sommes dans un cas d'équiprobabilité car le tirage est effectué au hasard et simultanément, donc :

$$p(D) = \frac{\text{card}(D)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{56}{630} = \frac{4}{45}.$$

Conclusion : l'élève a raison.

40 **1.** 15 € ; 30 € ; 45 € ; 60 € ; 510 € ; 525 € ; 540 €.

2.

x	15	30	45	60	510	525	540
$p(X = x)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{84}$	$\frac{5}{42}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{28}$

3. $E(X) = 195$.

4. $V(X) = 129\,375$ et $\sigma(X) \simeq 359{,}7$.

50 $p(A) = 0{,}3$, $p(B) = 0{,}7$, $p_A(B) = \frac{2}{3}$, $p_B(A) = \frac{2}{7}$ et $p(A \cap B) = 0{,}2$.

51 $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

52 **1.**

	Personnes contaminées	Personnes non contaminées	Total
Test positif	2	260	262
Test négatif	0	9 738	9 738
Total	2	9 998	10 000

2. $p(A) = 0{,}000\,2$;
$p(B) = 0{,}996 \times 0{,}000\,2 + 0{,}002\,6 \times 0{,}999\,8 = 0{,}002\,798\,68$.

3. $p_A(B) = 0{,}996$; $p_A(\bar{B}) = 0{,}004$;

$$p_{\bar{B}}(A) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{p_A(\bar{B})p(A)}{p(\bar{B})} = \frac{0{,}004 \times 0{,}000\,2}{0{,}997\,201\,32} \approx 8 \times 10^{-7} ;$$

$p_{\bar{B}}(\bar{A}) = 1 - p_{\bar{B}}(A) = 1 - 8 \times 10^{-7}$.

4. $p(A \cap B) = 0{,}000\,199\,2$;
$p(\bar{A} \cap B) = 0{,}025\,994\,8$;
$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}973\,805\,2$.

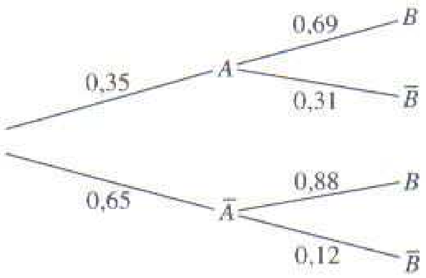
5. $p = p(\bar{A} \cap B) + p(A \cap \bar{B}) = 0{,}025\,995\,6$.

53 $p_B(A)=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{8}$ et $p_A(B)=\dfrac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$.

54 $p(A\cap B)=\dfrac{1}{5}$; $p_B(A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$, donc :

$$p(B)=\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}}=\dfrac{3}{5}\ ;\quad p(A\cup B)=\dfrac{4}{5}\ .$$

55 **1.**



2. $p(B)=0{,}35\times0{,}69+0{,}88\times0{,}65=0{,}813\ 5$,
$p(A\cup B)=0{,}922$.

$p_B(A)=\dfrac{0{,}69\times0{,}35}{0{,}813\ 5}=\dfrac{483}{1\ 627}$, $p_B(\overline{A})=\dfrac{1\ 144}{1\ 627}$

$p_{\overline{B}}(A)=\dfrac{0{,}31\times0{,}35}{0{,}813\ 5}=\dfrac{217}{1\ 627}$ et $p_{\overline{B}}(\overline{A})=\dfrac{1\ 410}{1\ 627}$.