PARTIE I

Dans cette première partie, on étudie le signe de la fonction numérique g définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{x+1}{2x+1} - \ln x$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

◆ **1.** Étudier le sens de variation de g.

◆ **2.** *a)* Calculer $g(1)$ et $g(2)$.

Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α dans $]0\,;+\infty[$.

b) Trouver un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

◆ **3.** Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0\,;+\infty[$.

PARTIE II

L'objet de cette deuxième partie est l'étude de la fonction numérique f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln x}{x^2+x}.$$

On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unités : 1 cm sur $x'Ox$. 2 cm sur $y'Oy$).

◆ **1.** Étudier les limites de f en 0 et $+\infty$.

Interpréter graphiquement ces limites.

◆ **2.** *a)* Montrer que, pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$.

$$f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \cdot g(x).$$

b) En déduire les variations de f.

c) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ et donner le tableau de variations de f.

◆ **3.** Construire $(\mathscr{C})$.

CORRIGE

PARTIE I

$g(x) = \dfrac{x+1}{2x+1} - \ln x$ sur $]0, +\infty[$

◆ **1.** g est la somme de 2 fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ donc g est dérivable sur $]0, +\infty[$

et $\forall x \in\ ]0, +\infty[$,

$$g'(x) = \frac{1 \times (2x+1) - (x+1) \times 2}{(2x+1)^2} - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{-1}{(2x+1)^2} - \frac{1}{x}.$$

$\forall x \in\ ]0, +\infty[,\ \dfrac{-1}{(2x+1)^2} < 0$ et $-\dfrac{1}{x} < 0$

donc $g'(x) < 0$.

(On peut aussi réduire l'expression au même dénominateur $g'(x) = \dfrac{-x - (2x+1)^2}{x(2x+1)^2} = \dfrac{-4x^2 - 5x - 1}{x(2x+1)^2}$

et étudier le signe du numérateur et du dénominateur.)

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $-4x^2 - 5x - 1 < 0$ car ce trinôme n'a pas de racine sur $]0 ; +\infty[$.

$\forall x \in\ ]0, +\infty[\ \ x(2x+1)^2 > 0$

donc $g'(x) < 0$ sur $]0, +\infty[$)

donc g est décroissante sur $]0, +\infty[$.

◆ **2.** *a)* $g(1) = \dfrac{2}{3}$ $g(2) = \dfrac{3}{5} - \ln 2 \simeq -0{,}1$.

• g est décroissante sur $]0, 1]$ et $g(1) = \dfrac{2}{3}$

donc $\forall x \in\ ]0, 1]\ \ g(x) \geqslant \dfrac{2}{3}$

donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]0, 1]$.

• g est dérivable sur $]1, 2[$ et $\forall x \in\ ]1, 2[,\ g'(x) < 0$ donc g est une bijection strictement décroissante de $]1, 2[$ sur $g(]1, 2[) = \left]\dfrac{3}{5} - \ln 2, \dfrac{2}{3}\right[$

$0 \in \left]\frac{3}{5} - \ln 2\ ;\ \frac{2}{3}\right[$ donc 0 a un antécédent unique α dans $]1, 2[$ tel que $g(\alpha) = 0$

donc l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α dans $]1, 2[$

• g est décroissante sur $[2, +\infty[$ et $g(2) = \frac{3}{5} - \ln 2$

donc $\forall x \in [2, +\infty[\quad g(x) \leqslant \frac{3}{5} - \ln 2 < 0$

donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution dans $[2, +\infty[$

donc l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α dans $]0, +\infty[$

b) $g(1{,}8) \simeq 0{,}02 > 0$

$g(1{,}9) \simeq -\ 0{,}04 < 0$

donc $g(1{,}9) < g(\alpha) < g(1{,}8)$

donc $1{,}8 < \alpha < 1{,}9$ car g est décroissante sur $]1, 2[$.

◆ **3.** Le tableau suivant donne donc le signe de $g(x)$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+$	0	$-$	

PARTIE II

$f(x) = \dfrac{2 \ln x}{x^2 + x}$ sur $]0, +\infty[$

◆ **1.** Quand $x \to 0^+$

$2 \ln x \to -\infty$

$x^2 + x \to 0^+$ donc $\dfrac{1}{x^2 + x} \to +\infty$

donc $(-2 \ln x) \times \dfrac{1}{x^2 + x} \to -\infty$

donc $\lim\limits_{0^+} f = -\infty$ donc $x = 0$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}_f$.

Quand $\quad x \to +\infty$

$2 \ln x \to +\infty$

$x^2 + x \to +\infty$

Il s'agit donc d'une forme indéterminée.
Transformons l'écriture de $f(x)$.

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \times \frac{1}{x+1}$$

Quand $x \to +\infty$

$\frac{\ln x}{x} \to 0$ (résultat du cours)

$x + 1 \to +\infty$ donc $\frac{1}{x+1} \to 0$.

donc $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ donc $y = 0$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}_f$.

◆ **2.** *a)* f est le quotient de 2 fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et $\forall\, x \in \,]0, +\infty[\;\; x^2 + x \neq 0$ donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$
et $\forall\, x \in \,]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\frac{2}{x}(x^2+x) - 2\ln x\,(2x+1)}{(x^2+x)^2}$$

$$\text{donc } f'(x) = \frac{2(x+1) - 2\ln x(2x+1)}{(x^2+x)^2}$$

$$= \frac{2}{(x^2+x)^2} \times (2x+1)\left[\frac{x+1}{2x+1} - \ln x\right]$$

donc $\quad \forall\, x \in \,]0, +\infty[,\; f'(x) = \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} \times g(x).$

b) $\forall\, x \in \,]0, +\infty[\;\; \frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2} > 0$

donc f' a le même signe que g

donc f est croissante sur $]0, \alpha]$
et f est décroissante sur $[\alpha, +\infty[$.

c) $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha+1}{2\alpha+1} - \ln \alpha = 0$

donc $\ln \alpha = \frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$.

Or $f(\alpha) = \dfrac{2 \ln \alpha}{\alpha^2 + \alpha}$

donc $f(\alpha) = \dfrac{2\left(\dfrac{\alpha+1}{2\alpha+1}\right)}{\alpha^2 + \alpha} = \dfrac{2(\alpha+1)}{\alpha(\alpha+1)(2\alpha+1)}$

or $\alpha + 1 \neq 0$ donc $f(\alpha) = \dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$.

Pour la construction de la courbe,

- *respectez les unités si elles sont données dans le texte ;*

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-\infty$ ↗	$\dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$	↘	0

◆ **3.**