EXERCICES D'ENTRAINEMENT SUR LN

EXERCICE 1

◆ **1.** Soit la fonction $g(x) = 2x - 1 - \ln x$.

a) Établir le tableau de variation de g.
b) En déduire le signe de g sur $]0, +\infty[$.

◆ **2.** Soit la fonction $f(x) = x^2 - x\ln x + 3$ définie sur $]0, +\infty[$.

a) Étudier la limite de f en 0 et en $+\infty$.
b) Montrer que $f'(x) = g(x)$ sur $]0, +\infty[$ et en déduire le tableau de variation de f.

EXERCICE 2

Soit la fonction $f : x \to \ln\left(\dfrac{x+1}{3-x}\right)$ et soit $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

◆ **1.** Déterminer le domaine de définition de f et étudier les limites de f aux bornes de son intervalle de définition.

◆ **2.** Montrer que le point A(1, 0) est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par $f(x) = x - 1 - 2\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$.

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

◆ **1.** Étudier la fonction f sur $]1, +\infty[$ et dresser son tableau de variation.

◆ **2.** Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ et préciser la position de $\mathscr{C}$ par rapport à (Δ).

◆ **3.** Construire (Δ) et $\mathscr{C}$ dans le repère.

◆ **4.** Montrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2, +\infty[$ et donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

CORRIGES

EXERCICE 1

◆ **1.** $g(x) = 2x - 1 - \ln x$

a) $\mathscr{D}_g =]0, +\infty[$.

g est la somme de fonctions dérivables sur $\mathscr{D}_g$ donc g est dérivable sur $\mathscr{D}_g$ et

$\forall x \in \mathscr{D}_g \quad g'(x) = 2 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x-1}{x}$.

$\forall x \in \mathscr{D}_g, \quad x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $2x - 1$

or $2x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{1}{2}$

donc le tableau de variations de g est le suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$\searrow$	$-\ln\frac{1}{2}$	$\nearrow$	

b) $-\ln \dfrac{1}{2} = \ln 2 \simeq 0,7$

or $-\ln \dfrac{1}{2}$ est le minimum de g sur $]0, +\infty[$

donc $\qquad \boldsymbol{\forall x \in]0, +\infty[, \ g(x) > 0.}$

◆ **2.** $f(x) = x^2 - x \ln x + 3$

a) Quand $x \to 0^+$

$x^2 \to 0$

$x \ln x \to 0$ (résultat du cours)

donc $\qquad \boldsymbol{\lim\limits_{0^+} f = 3.}$

Quand $x \to +\infty$

$x^2 \to +\infty$

$\ln x \to +\infty$ donc $-x \ln x \to -\infty$

donc il s'agit d'une forme indéterminée

or $f(x) = x^2\left(1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$.

Quand $x \to +\infty$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\ln x}{x} \to 0 \\ \frac{3}{x^2} \to 0 \end{array}\right\} \text{donc } \left(1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{3}{x^2}\right) \to 1$$

donc $$\lim_{+\infty} f = +\infty.$$

b) f est la somme de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$

et $\forall x \in\ ]0, +\infty[$, $f'(x) = 2x - \left(1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}\right)$

$= 2x - \ln x - 1 = g(x)$.

Or on sait que $\forall x \in\ ]0, +\infty[$, $g(x) > 0$

donc f est croissante sur $]0, +\infty[$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	$3 \nearrow$	$+\infty$

EXERCICE 2

$f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)$

1. $f(x)$ existe ssi $\frac{x+1}{3-x} > 0$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x+1}{3-x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

donc $\frac{x+1}{3-x} > 0$ ssi $-1 < x < 3$ donc $\mathscr{D}_f = \mathbf{]-1, 3[}$.

Posons $u(x) = \frac{x+1}{3-x}$ et $v(x) = \ln x$.

$\forall x \in \mathscr{D}_f \quad (v \circ u)(x) = v[u(x)] = v\left(\dfrac{x+1}{3-x}\right) = \ln\left(\dfrac{x+1}{3-x}\right) = f(x)$

donc $f = v \circ u$

- Quand $\left.\begin{cases} x \to -1 \\ x > -1 \end{cases} \begin{matrix} x+1 \to 0^+ \\ 3-x \to 4 \end{matrix}\right\}$ donc $u(x) \to 0^+$, or $\lim\limits_{x \to 0^+} v(x) = -\infty$

donc $$\lim_{\begin{cases} x \to -1 \\ x > -1 \end{cases}} f(x) = -\infty.$$

- Quand $\left.\begin{cases} x \to 3 \\ x < 3 \end{cases} \begin{matrix} x+1 \to 4 \\ 3-x \to 0^+ \end{matrix}\right\}$ donc $u(x) \to +\infty$, or $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = +\infty$

donc $$\lim_{\begin{cases} x \to 3 \\ x < 3 \end{cases}} f(x) = +\infty.$$

◆ **2.** Soit $M(x, y)$ un point quelconque du plan et soit $M'(x', y')$ son symétrique par rapport à A.

A est le milieu de [MM′] donc $\begin{cases} 1 = \dfrac{x+x'}{2} \Leftrightarrow x' = 2 - x \Leftrightarrow x' = 2 - x' \\ 0 = \dfrac{y+y'}{2} \Leftrightarrow y' = -y \Leftrightarrow y = 2 - y'. \end{cases}$

Montrons que si $M \in \mathscr{C}_f$ alors $M' \in \mathscr{C}_f$.

$M \in \mathscr{C}_f$ ssi $x \in \mathscr{D}_f$ et $y = f(x)$

- si $x \in \mathscr{D}_f$, $-1 < x < 3 \Leftrightarrow -3 < -x < 1 \Leftrightarrow -1 < 2 - x < 3$ $\Leftrightarrow -1 < x' < 3 \Leftrightarrow x' \in \mathscr{D}_f$
- si $y = \ln\left(\dfrac{x+1}{3-x}\right)$, $-y' = \ln\left(\dfrac{3-x'}{1+x'}\right) \Leftrightarrow y' = -\ln\left(\dfrac{3-x'}{1+x'}\right)$

$\Leftrightarrow y' = \ln\left(\dfrac{1+x'}{3-x'}\right) \Leftrightarrow y' = f(x')$

donc $M' \in \mathscr{C}_f$

donc **le point A (1, 0) est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.**

Autre méthode : changement de repère

Soit M un point quelconque du plan.

Appelons (x, y) ses coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

et (X, Y) ses coordonnées dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$.

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM}$ donc $\begin{cases} x = 1 + X \\ y = 0 + Y \end{cases}$

or $M \in \mathscr{C}_f$ ssi $y = \ln\left(\dfrac{x+1}{3-x}\right)$

$$\Leftrightarrow Y = \ln\left(\frac{(1+X)+1}{3-(1+X)}\right) = \ln\left(\frac{X+.2}{2-X}\right).$$

$Y = \ln\left(\dfrac{X+2}{2-X}\right)$ est l'équation de $\mathscr{C}_f$ dans le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $g : X \to \ln\left(\dfrac{X+2}{2-X}\right)$.

$\mathscr{D}_g =]-2, 2[$ donc $\forall X \in \mathscr{D}_g$, $-X \in \mathscr{D}_g$

$g(-X) = \ln\left(\dfrac{-X+2}{2+X}\right) = \ln\left(\dfrac{2-X}{2+X}\right)$.

$\dfrac{2-X}{2+X}$ est l'inverse de $\dfrac{X+2}{2-X}$ donc $\ln\left(\dfrac{2-X}{2+X}\right) = -\ln\left(\dfrac{X+2}{2-X}\right)$

donc $g(-X) = -g(X)$

donc g est une fonction impaire

donc $\mathscr{C}_f$ admet comme centre de symétrie l'origine A du repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$

donc $A(1, 0)$ est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 3

$f(x) = x - 1 - 2\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$

◆ **1.** $\forall x \in]1, +\infty[\quad x - 1 > 0\quad$ et $\quad x > 0\quad$ donc $f(x)$ existe donc f est bien définie sur $]1, +\infty[$.

- Quand $\begin{cases} x \to 1 \\ x > 1 \end{cases}$

  $x - 1 \to 0^+$

Étudions la limite de $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ quand $\begin{cases} x \to 1 \\ x > 1 \end{cases}$

Posons $u(x) = \frac{x-1}{x}$ et $v(x) = \ln x$, $(v \circ u)(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$.

Or $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{x-1}{x} = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} v(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\infty$

donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left[-2\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right] = +\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \boldsymbol{f(x) = +\infty}$.

- Quand $x \to +\infty$

  $x - 1 \to +\infty$

  $u(x) \to 1$ car u est une fonction rationnelle

  or $\lim\limits_{x \to 1} v(x) = 0$ donc $\lim\limits_{+\infty} \boldsymbol{f = +\infty}$.

Posons $u(x) = \frac{x-1}{x}$, u est dérivable et strictement positive sur $]1, +\infty[$ donc $\ln u$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et sa dérivée est $\frac{u'}{u}$.

Or $\forall x \in]1, +\infty[\quad u'(x) = \frac{1 \times x - (x-1) \times 1}{x^2} = \frac{1}{x^2}$

donc la dérivée de $\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)$ est $\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{1}{x(x-1)}$

$\forall x \in]1, +\infty[\quad x(x-1) > 0\quad$ donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 - x - 2$.

x		-1		2	
$x^2 - x - 2$	$+$	0	$-$	0	$+$

donc **f est décroissante sur $]1, 2]$**
et f est croissante sur $[2, +\infty[$.

Le tableau de variation de f sur $]1, +\infty[$ est donc le suivant :

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$1 - 2\ln\dfrac{1}{2}$	↗	$+\infty$

2. $f(x) - (x-1) = -2\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$

Or on a vu à la question précédente que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = 0$

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = 0$

donc **la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à $\mathscr{C}$.**

$$-2\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) > 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) < \ln 1$$

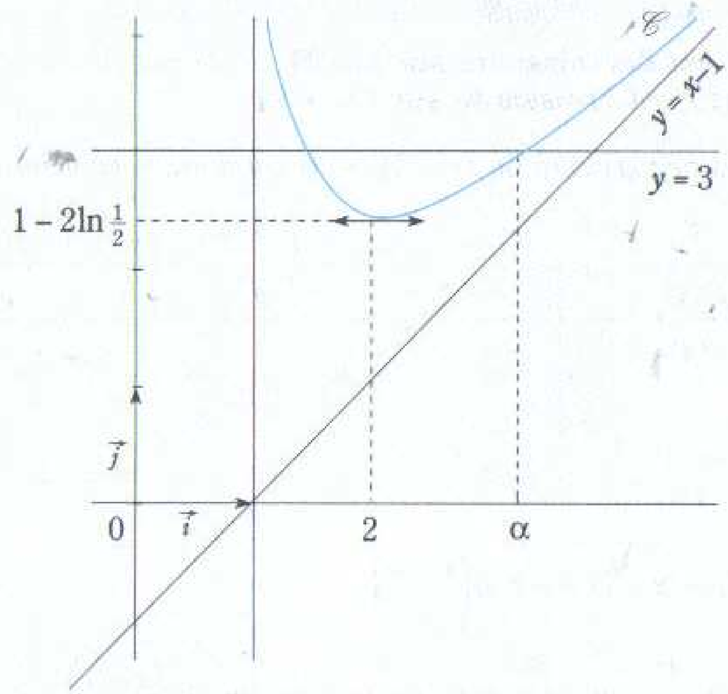
$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x} < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{x} < 0.$$

Or $\forall x \in]1, +\infty[\ -\dfrac{1}{x} < 0\quad$ donc $\quad -2\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right) > 0$

donc **$\mathscr{C}$ est au-dessus de (D) pour tout x de $]1, +\infty[$.**

◆ **3.** $\mathscr{C}$ admet deux asymptotes $x = 1$ et $y = x - 1$ et un minimum de coordonnées $\left(2, 1 - 2\ln\dfrac{1}{2}\right)$.



◆ **4.** f est dérivable sur $[2, +\infty[$ et $\forall x \in\ ]2, +\infty[\quad f'(x) > 0$ donc f établit une bijection strictement croissante de $[2, +\infty[$ sur $f([2, +\infty[) = [1 - 2\ln\dfrac{1}{2}, +\infty[$.

$1 - 2\ln\dfrac{1}{2} \simeq 2{,}38$ donc $3 \in [1 - 2\ln\dfrac{1}{2}, +\infty[$

donc 3 a un antécédent unique α dans $[2, +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 3$

donc **l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α dans $[2, +\infty[$.**

$f(3{,}26) \simeq 2{,}99$
$f(3{,}27) \simeq 3 + 2 \cdot 10^{-5}$
donc $f(3{,}26) < f(\alpha) < f(3{,}27)$

donc **$3{,}26 < \alpha < 3{,}27$.**
3,26 et 3,27 sont les deux valeurs approchées de α à 10^{-2} près.