# ETUDIER DES FONCTIONS LOGARITHMIQUES
# EXERCICES CORRIGES

## Enoncé

Pour les fonctions suivantes déterminer :

1. Le domaine de définition $D_f$
2. Les limites aux bornes de $D_f$
3. La dérivée et le signe de la dérivée, le sens de variation de f
4. Le tableau de variation

1. $f(x) = x \ln x$
2. $g(x) = x - \ln x$
3. $h(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
4. $i(x) = \ln(x^2)$
5. $j(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x}$

CORRIGE

1.

$f(x)$ existe ssi $x > 0$ donc $\mathscr{D}_f = ]0, +\infty[$

> *Vous obtenez une forme indéterminée mais on a démontré dans le cours que $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0$.*

• Quand $x \to 0^+$ $x \ln x \to 0$ (résultat du cours)

Donc $\lim\limits_{0^+} f = 0$

quand $x \to +\infty$ $\ln x \to +\infty$

donc $x \ln x \to +\infty$ donc $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

• $f$ est le produit de 2 fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ donc $f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$\forall x \in ]0, +\infty[, f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$

> *f est de la forme uv donc f' = u'v + uv'.*

or, $\ln x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \geqslant -1 \Leftrightarrow \ln x \geqslant \ln\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x \geqslant \dfrac{1}{e}$

donc $f$ est décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{e}\right]$,

et $f$ est croissante sur $\left[\dfrac{1}{e}, +\infty\right[$

| $x$ | $0$ | | $\frac{1}{e}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{e}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

2.

- $g(x)$ existe ssi $x > 0$ donc $\mathscr{D}_g = ]0, +\infty[$
- Quand $x \to 0^+$, $\ln x \to -\infty$

donc $-\ln x \to +\infty$

donc $x - \ln x \to +\infty$ $\quad \lim\limits_{0^+} g = \infty.$

Quand $x \to +\infty$, $\ln x \to +\infty$

donc $-\ln x \to -\infty$

donc $(x - \ln x)$ est une forme indéterminée, il faut transformer $g(x)$.

*Faites apparaître $\frac{\ln x}{x}$ car on a démontré dans le cours que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$*

$$g(x) = x\left[1 - \frac{\ln x}{x}\right].$$

Quand $x \to +\infty$, $\frac{\ln x}{x} \to 0$

donc $1 - \frac{\ln x}{x} \to 1$

donc $x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) \to +\infty$ $\quad \lim\limits_{+\infty} g = +\infty.$

*$g$ est de la forme $u - v$ donc $g' = u' - v'$.*

- $g$ est la différence de 2 fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ donc $g$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

et $\forall x \in ]0, +\infty[$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}.$

$\forall x \in \mathscr{D}_g$, $x > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $(x - 1)$

or $x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$

donc $g$ est décroissante sur $]0, 1]$
et $g$ est croissante sur $[1, +\infty[$.

- Le tableau de variation de $g$ est donc

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

3.

- $h(x)$ existe ssi $x > 0$ et $x \neq 0$

donc $\mathscr{D}_h = ]0, +\infty[$.

- Quand $x \to 0^+$, $\left.\begin{array}{l}\ln x \to -\infty \\ \dfrac{1}{x} \to +\infty\end{array}\right\}$ donc $\ln x \times \dfrac{1}{x} \to -\infty$

or $h(x) = \ln x \times \dfrac{1}{x}$ donc $\lim\limits_{0^+} h = -\infty$.

Quand $x \to +\infty$, $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$ (résultat du cours)

donc $\lim\limits_{+\infty} h = 0$.

h est de la forme $\frac{u}{v}$ donc $h' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

- $h$ est le quotient de 2 fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in ]0, +\infty[$, $x \neq 0$ donc $h$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in ]0, +\infty[,\ h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$\forall x \in \mathscr{D}_h$, $x^2 > 0$
donc $h'(x)$ est du signe de $(1 - \ln x)$
or $1 - \ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \leqslant 1 \Leftrightarrow x \leqslant e$

donc $h$ est croissante sur $]0, e]$
et $h$ est décroissante sur $[e, +\infty[$.

- Le tableau de variation de $h$ est donc le suivant :

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{e}$ | $\searrow$ | $0$ |

4.

> *Attention ! $\ln(x^2) = 2\ln x$ ssi $x > 0$ donc sur $\mathbb{R}^*$ $\ln(x^2) \neq 2\ln x$.*

- $i(x)$ existe ssi $x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ donc $\mathcal{D}_i = \mathbb{R}^*$.

On peut remarquer que $i$ est une fonction paire car $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, -x \in \mathbb{R}^*$ et

$$i(-x) = \ln[(-x)^2] = \ln[(x^2)] = i(x).$$

On pourra alors limiter l'étude de $i(x)$ à $\mathbb{R}_+^*$ puis en déduire l'étude de $i(x)$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

> *Si on a remarqué que f est paire, l'étude des limites se réduit à $0^+$ et $+\infty$.*

- Quand $x \to 0^+$, $x^2 \to 0^+$ donc $\ln(x^2) \to -\infty$

donc $\lim\limits_{0^+} i = -\infty.$

Quand $x \to +\infty$, $x^2 \to +\infty$ donc $\ln(x^2) \to +\infty$

donc $\lim\limits_{+\infty} i = +\infty.$

Or $\lim\limits_{x \to 0^-} i(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} i(-x) = \lim\limits_{x \to 0^+} i(x) = -\infty$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} i(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} i(-x) = \lim\limits_{x \to +\infty} i(x) = +\infty$

donc $\lim\limits_{0^-} i = -\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} i = +\infty.$

> *i est de la forme $\ln(u)$ avec $u > 0$ donc $i' = \dfrac{u'}{u}$.*

- Si on pose $u(x) = x^2$ alors $i = \ln u$

$u$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}^*$ donc $i$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$

et $\forall\, x \in \mathbb{R}^*, i'(x) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x}$

donc $i'(x) < 0$ sur $]-\infty, 0[$ et $i'(x) > 0$ sur $]0, +\infty[$

donc $i$ est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et croissante sur $]0, +\infty[$.

- Le tableau de variation de $i$ est donc le suivant :

| $x$ | $+\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $i'(x)$ | | $-$ | ‖ | $+$ | |
| $i(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ $-\infty$ | ‖ | $-\infty$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

5.

- $j(x)$ existe ssi $x > 0$ et $x \neq 0$

donc $\mathscr{D}_j = ]0, +\infty[$.

- Quand $x \to 0^+$

$\ln x \to -\infty$ donc $1 - \ln x \to +\infty$

$\frac{1}{x} \to +\infty$

donc $(1 - \ln x) \times \frac{1}{x} \to +\infty$

or $j(x) = (1 - \ln x) \times \frac{1}{x}$

donc $\lim\limits_{0^+} j = +\infty$.

Quand $x \to +\infty$

$\ln x \to +\infty$ donc $1 - \ln x \to -\infty$

donc $\frac{1 - \ln x}{x}$ est une forme indéterminée

*Faites apparaître $\frac{\ln x}{x}$ car on sait que $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.*

or $j(x)$ peut s'écrire $j(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}$.

Quand $x \to +\infty$

$\frac{1}{x} \to 0$

$\frac{\ln x}{x} \to 0$ (résultat du cours)

donc $\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \to 0$

$\lim\limits_{+\infty} j = 0$.

*$j$ est de la forme $\frac{u}{v}$ donc $j' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.*

- $j$ est le quotient de 2 fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in ]0, +\infty[$, $x \neq 0$ donc $j$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et
$\forall x \in ]0, +\infty[$,

$$j'(x) = \frac{-\frac{1}{x} \times x - (1 - \ln x) \times 1}{x^2} = \frac{\ln x - 2}{x^2}.$$

$\forall x \in \mathscr{D}_j$, $x^2 > 0$ donc $j'(x)$ est du signe de $\ln x - 2$
or $\ln x - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \ln x \geqslant 2 \Leftrightarrow x \geqslant= e^2$

donc $j$ est décroissante sur $]0, e^2]$
et $j$ est croissante sur $[e^2, +\infty[$.

- Le tableau de variation de $j$ est donc

| $x$ | $0$ | | $e^2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $j'(x)$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $j(x)$ | ‖ $+\infty$ | ↘ | $-\frac{1}{e^2}$ | ↗ | $0$ |