CORRECTION DES EXERCICES SUR LES SUITES

49 **a.** (u_n) est majorée par $\frac{7}{2}$ et minorée par 1.

b. (u_n) n'est ni majorée, ni minorée.

c. $(u_n) \geqslant -n-1+n \geqslant -1$.

Donc (u_n) est minorée par -1 , elle n'est pas majorée.

d. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{n^2+1-n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}$.

Donc (u_n) est majorée par 1 et minorée par 0.

50 **a.** (u_n) est majorée par 1 et n'est pas minorée.

b. (u_n) est minorée par 0 et n'est pas majorée.

c. (u_n) est minorée par -1 et majorée par 1.

51 $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n \leqslant 5$.

52 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{p=0}^{n+2} 5^{2-p} = 5^2 \times \frac{1-5^{-n-3}}{1-5^{-1}} = \frac{5^3}{4}\ (1-5^{-n-3})$.

(u_n) est minorée par 25 et majorée par $\frac{5^3}{4}$.

53 **a.** Au rang 0 : $0 < \frac{1}{7} < \frac{3}{4}$, donc $0 < u_0 < \frac{3}{4}$.

b. Hérédité : $0 < u_n < \frac{3}{4}$, donc $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}\ u_n + \frac{1}{2} < \frac{3}{4}$ soit $\frac{1}{2} < u_{n+1} < \frac{3}{4}$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{3}{4}$.

54 Au rang 1 : $u_0 = 1$ et donc $u_0 \geqslant 1$.

Hérédité

- $u_n \geqslant 1$, donc $\frac{1}{2}\ u_{n+1} + \frac{2}{3}\ u_n \geqslant \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \geqslant \frac{7}{6} \geqslant 1$.
- $u_{n-1} \geqslant 1$.

D'où $u_{n+1} \geqslant 1$.

57 **a.** (U_n) est croissante.

b. (V_n) est croissante. **c.** (W_n) est croissante.

58 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\sqrt{u_n} \leqslant 0$, donc (u_n) est décroissante.

59 **1.** Au rang 1 : $u_1 = 3 \geqslant 0$.

Hérédité : $u_n \geqslant 0$, donc $2u_n + u_n^2 \geqslant 0$, soit $u_{n+1} \geqslant 0$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = u_n + u_n^2 \geqslant 0$, donc (u_n) est croissante.

60 • $u_0 = 1$. • $u_1 = 2{,}83$ à 10^{-2} près. • $u_2 = 3{,}13$ à 10^{-2} près.
• $u_3 = 3{,}18$ à 10^{-2} près. • $u_4 = 3{,}19$ à 10^{-2} près.
• $u_5 = 3{,}19$ à 10^{-2} près. (u_n) semble croissante.

Au rang 0 : $u_1 = \sqrt{8}$ et $u_0 = 1$, donc $u_1 \geqslant u_0$.

Hérédité : $u_{n+1} \geqslant u_n$, donc $u_{n+1} + 7 \geqslant u_n + 7$, soit $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$.

61 • $u_0 = 8$. • $u_1 = 5$. • $u_2 = 4$. • $u_3 = 3{,}6$ à 10^{-1} près.
• $u_4 = 3{,}44$ à 10^{-2} près. • $u_5 = 3{,}36$ à 10^{-2} près.

(u_n) semble décroissante.

Au rang 0 : $u_1 = 5$ et $u_0 = 8$, donc $u_1 \leqslant u_0$.

Hérédité : $u_{n+1} \leqslant u_n$, donc $3u_{n+1} + 1 \leqslant 3u_n + 1$, soit $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

62 **1.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2 - \sin x \geqslant 1 > 0$.

f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe un unique $x \in \mathbb{N}$ tel que $f(x) = k$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant n+1$. Soit $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, donc $u_n \leqslant u_{n+1}$, car f est croissante sur $\mathbb{R}$. (u_n) est croissante.

4. $\forall n \in \mathbb{N}$, $-n-1 \leqslant -n$, $f(v_{n+1}) \leqslant f(v_n)$.

Donc $v_{n+1} \leqslant v_n$ car, f est croissante sur $\mathbb{R}$. (v_n) est décroissante.

63 **1.** **a.** Par récurrence, au rang 0 : $u_0 = 0 \in [0\,;\,5]$.

Hérédité : $u_n \in [0\,;\,5]$, $f(u_n) \in \left[1\,;\,\frac{7}{2}\right] \subset [0\,;\,5]$.

b. Au rang 0 : $u_0 = 0$ et $u_1 = f(u_0) \geqslant 0$, donc $u_0 \leqslant u_1$.

Hérédité : $u_n \leqslant u_{n+1}$, donc $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, car f est croissante sur $[0\,;\,5]$, d'où : $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.

(u_n) est croissante et majorée, donc elle converge.

2. **a.** Voir **1. a.**, seul le 1er rang change.

b. Au rang 0 : $u_0 = 5$ $u_1 = f(u_0) \in [0\,;\,5]$, donc $u_0 \geqslant u_1$.

Hérédité : $u_{n+1} \leqslant u_n$, donc $f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$, car f est croissante sur $[0\,;\,5]$, d'où : $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

(u_n) est décroissante minorée, donc (u_n) converge.

64 **1.** (U_n) est croissante pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (U_n) est minorée par $-\dfrac{1}{3}$ et majorée par 3.

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \dfrac{1}{2}$.

65 **1.** Au rang 0 : $u_0 = 8$ donc $u_0 \geqslant 5$.

Hérédité : $u_n \geqslant 5$. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{7x-5}{x+1}$, $x \in [0\,;+\infty[$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = \dfrac{12}{(x+1)^2} > 0$. f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$u_n \geqslant 5$, donc $f(u_n) \geqslant f(5)$. $f(5) = \dfrac{30}{6} = 5$, donc $u_{n+1} \geqslant 5$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n-5)(u_n-1)}{u_n+1}$.

Or $u_n \geqslant 5$, donc $u_n - 1 \geqslant 0$ et $u_n + 1 > 0$.
$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$. (u_n) est décroissante.

3. (u_n) est décroissante, donc majorée par $u_0 = 8$.
(u_n) est minorée par 5 d'après **1.** (u_n) est donc bornée.

66 **1.** Au rang 0 : $u_0 = 0 \in [0\,;1]$.

Hérédité : $u_n \in [0\,;1]$. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+2}$, $x \in [0\,;+\infty[$.

f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{3}{(x+2)^2} > 0$, f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.
Donc $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$, soit :

$$\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1 \quad \text{donc} \quad u_{n+1} \in [0\,;1].$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+1)}{u_n+2}$.

Or $u_n \in [0\,;1]$, donc $1 - u_n \geqslant 0$, $u_n + 1 \geqslant 0$ et $u_n + 2 > 0$.

3. D'où $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$; (u_n) est croissante.

67 **1.** Au rang 0 : $u_0 = 1$ et $1 \geqslant -3$.

Hérédité : $u_n \geqslant -3$, donc $\frac{4}{3} u_n + 1 \geqslant -3$, soit $u_{n+1} \geqslant -3$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3} u_n + 1 \geqslant 0$, car $u_n \geqslant -3$.
(u_n) est croissante.

68 **1.** Au rang 0 : $u_0 = -2$, donc $u_0 \leqslant -\frac{2}{3}$.

Hérédité : $u_n \leqslant -\frac{2}{3}$, donc $\frac{1}{2} u_n - \frac{1}{3} \leqslant -\frac{2}{3}$, soit $u_{n+1} \leqslant -\frac{2}{3}$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2} u_n - \frac{1}{3}$.

Or $u_n \leqslant -\frac{2}{3}$, donc $-\frac{1}{2} u_n \geqslant \frac{1}{3}$.
D'où $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. (u_n) est croissante.

69 **1.** Au rang 0 : $u_0 = 0$ donc $u_0 \geqslant 0$.

Hérédité : $u_n \geqslant 0$, donc $\frac{1}{2} u_n + 5 \geqslant 5$, soit $u_{n+1} \geqslant \sqrt{5} \geqslant 0$.

2. Au rang 0 : $u_0 = 0$, donc $u_0 \leqslant \frac{5}{2}$.

Hérédité : $u_n \leqslant \frac{5}{2}$, donc $\frac{1}{2} u_n + 5 \leqslant \frac{5}{4} + 5$, soit $u_{n+1} \leqslant \sqrt{\frac{25}{4}}$.

$$u_{n+1} \leqslant \frac{5}{2} .$$

3. $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1}{2} u_n + 5} - u_n = \frac{\frac{1}{2} u_n + 5 - u_n^2}{\sqrt{\frac{1}{2} u_n + 5} + u_n} = \frac{(5 - 2u_n)(u_n + 2)}{2\left(\sqrt{\frac{1}{2} u_n + 5} + u_n\right)}$$

Or $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{5}{2}$, donc :

$$5 - 2u_n \geqslant 0 \ , \ u_n + 2 \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 2\left(\sqrt{\frac{1}{2} u_n + 5} + u_n\right) > 0 .$$

Par suite, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. (u_n) est croissante.