EXERCICES CORRIGES SUR LES INEQUATIONS EN LN

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. (I_1) $\ln(x^2 - 1) < \ln 3$

2. (I_2) $\ln(5 - 2x) \geqslant 0$

3. (I_3) $(\ln x)^2 - 3\ln x - 4 > 0$

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

4. (S_1) $\begin{cases} x + y = 5 \\ \ln x + \ln y = \ln 4 \end{cases}$

5. **2.** (S_2) $\begin{cases} 2\ln x + \ln y = -1 \\ 4\ln x + 3\ln y = 1 \end{cases}$

CORRIGES

1.

Si a et b sont deux réels strictement positifs $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$.

Aidez-vous de la droite des réels pour déterminer l'ensemble des solutions.

(I_1) existe ssi $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ou $x > 1$ donc le domaine d'existence de (I_1) est

$$D_1 =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

$\forall x \in D_1$, $(I_1) \Leftrightarrow x^2 - 1 < 3$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 < 0$

$\Leftrightarrow -2 < x < 2$

donc sont solutions de (I_1) les réels x tels que $x \in D_1$ et $x \in]-2, 2[$

$$S =]2, -1[\cup]1, 2[$$

2.

(I_2) existe ssi $5x - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{5}{2}$

donc le domaine d'existence de (I_2) est

$D_2 = \left]\dfrac{5}{2}, +\infty\right[$.

ln 1 = 0

$\forall x \in D_2, \quad (I_2) \Leftrightarrow \ln(5-2x) \geqslant \ln 1$

$\Leftrightarrow 5 - 2x \geqslant 1$

$\Leftrightarrow x \leqslant 2$

donc sont solutions de (I_2) les réels x tels que $x \in D_2$ et $x \in \left]-\infty, 2\right]$

donc $\quad S = \left]\dfrac{5}{2}, 2\right]$.

3.

Vous ne pouvez pas transformer l'inéquation pour l'écrire sous la forme ln a < ln b, utilisez alors un changement de variable en posant X = ln x.

(I_3) existe ssi $x > 0$ donc $D_3 = \left]0, +\infty\right[$.

Posons $X = \ln x$

on peut alors écrire (I_3) sous la forme

$$X^2 - 3X - 4 > 0.$$

Le trinôme $X^2 - 3X - 4$ a pour racines -1 et 4 donc $X^2 - 3X - 4 > 0$ ssi $X < -1$ ou $X > 4$

or $X = \ln x$

donc $\begin{cases} \ln x < -1 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{e} \left(\text{car } \ln \dfrac{1}{e} = -1\right) \\ \text{ou} \\ \ln x > 4 \Leftrightarrow x > e^4 (\text{car } \ln e^4 = 4) \end{cases}$

donc sont solutions de (I_3) les réels x tels que $x \in D_3$ et $x < \dfrac{1}{e}$ ou $x > e^4$

donc $\quad S = \left]0, \dfrac{1}{e}\right[\cup \left]e^4, +\infty\right[$.

4.

(S_1) existe ssi $x > 0$ et $y > 0$
donc l'ensemble d'existence de (S_1) est

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash x > 0 \text{ et } y > 0\}.$$

$$\forall (x, y) \in D_1,\ (S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ x\,(5 - x) = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ -x^2 + 5x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 - x \\ x = 1 \text{ ou } x = 4 \end{cases}$$

si $x = 1$ $y = 4$

si $x = 4$ $y = 1$

Les couples $(1, 4)$ et $(4, 1)$ appartiennent à D, donc ils sont solutions du système (S_1) :

ln 1 = 0.

Vérification pour (1,4)

$$\begin{cases} 1 + 4 = 5 \\ \ln 1 + \ln 4 = \ln 4 \end{cases}$$

Vérification pour (4, 1)

$$\begin{cases} 4 + 1 = 5 \\ \ln 4 + \ln 1 = \ln 4 \end{cases}$$

$$S = \{(1, 4)(4, 1)\}$$

5.

(S_2) existe ssi $x > 0$ et $y > 0$
donc le domaine d'existence de (S_2) est

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash x > 0 \text{ et } y > 0\}.$$

1re méthode : résolution directe.

$\forall (x, y) \in D_2$ on peut transformer chaque équation

$$\begin{cases} 2 \ln x + \ln y = -1 \Leftrightarrow \ln (x^2 y) = \ln \dfrac{1}{e} \\ 4 \ln x + 3 \ln y = 1 \Leftrightarrow \ln (x^4 y^3) = \ln e \end{cases}$$

Vous pouvez résoudre ce système par substitution

$e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} > 0.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 y = \dfrac{1}{e} \\ x^4 y^3 = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^{-2}}{e} \\ x^4 \left(\dfrac{x^{-2}}{e}\right)^3 = e \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^{-2}}{e} \\ x^{-2} = e^4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{e^4}{e} \\ x^2 = e^{-4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = e^3 \\ x = e^{-2} \text{ ou } x = -e^{-2} \end{cases}$$

$x > 0$ donc $-e^{-2}$ n'est pas solution de (S_2) donc (S_2) a pour seule solution le couple (e^{-2}, e^3).

2e méthode : changement de variable.

Si on pose $X = \ln x$ et $Y = \ln y$, le système (S_2) peut s'écrire :

$$\begin{cases} 2X + Y = -1 \\ 4X + 3Y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Y = -1 - 2X \\ 4X + 3(-1 - 2X) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = -1 - 2X \\ -2X = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = -2 \\ Y = 3 \end{cases}$$

Cette méthode beaucoup plus simple est donc conseillée.

Or $X = \ln x$ donc $\ln x = -2 \Leftrightarrow x = e^{-2}$
et $Y = \ln y$ donc $\ln y = 3 \Leftrightarrow x = e^3$.

Vérification (e^{-2}, e^3)

$$\begin{cases} 2 \ln(e^{-2}) + \ln(e^3) = -4 + 3 = -1 \\ 4 \ln(e^{-2}) + 3 \ln(e^3) = -8 + 9 = 1 \end{cases}$$

$$S = \{(e^{-2}, e^3)\}$$