CORRECTION DES EXERCICES SUR LA RECURRENCE P 72/73

16 Au rang 1 : $\sum_{i=1}^{1} i^3 = 1^3 = 1$ et $\left[\frac{1\times(1+1)}{2}\right]^2 = 1$.

On suppose que $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et on montre que $\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2$.

$$\sum_{i=1}^{n+1} i^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + (n+1)^3$$

$$= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) = (n+1)^2\left(\frac{n^2+4n+4}{4}\right)$$

$$= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 .$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

17 **a.** Au rang 1 : $4^1 - 1 = 3$ est bien divisible par 3.

On suppose que $4^n - 1$ est divisible par 3, $n \in \mathbb{N}^*$ et on montre que $4^{n+1} - 1$ est divisible par 3.

$4^n - 1$ est divisible par 3, donc il existe un entier p tel que $4^n - 1 = 3p$.

Or, $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4 \times (3p+1) - 1 = 12p + 3 = 3(4p+1)$.

Donc $4^{n+1} - 1$ est divisible par 3. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

b. Au rang 0 : $3^2 + 2^4 = 25$ est bien divisible par 5.

On suppose que $3^{3n+2} + 2^{n+4}$ est divisible par 5 avec $n \in \mathbb{N}$ et on montre que $3^{3n+5} + 2^{n+5}$ est divisible par 5.

Donc il existe un entier p tel que $3^{3n+2} + 2^{n+4} = 5p$. Or :

$$3^{3n+5} + 2^{n+5} = 27 \times 3^{3n+2} + 2 \times 2^{n+4}$$

$$= 25 \times 3^{3n+2} + 2 \times 3^{3n+2} + 2 \times 2^{n+4} = 5(5 \times 3^{3n+2} + 2p) .$$

Donc $3^{3n+5}+2^{n+5}$ est divisible par 5. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{3n+2}+2^{n+4}$ est divisible par 5.

c. Au rang 1 : $3^2-2=7$ est bien divisible par 7.

On suppose que $3^{6n-4}-2$ est divisible par 7 avec $n \in \mathbb{N}^*$ et on montre que $3^{6n+2}-2$ est divisible par 7.

Donc il existe un entier p tel que $3^{6n-4}-2=7p$. Or :

$$3^{6n+2}-2=3^6(7p+2)-2=7\times 3^6 p+1\ 456=7(3^6 p+28) .$$

Donc $3^{6n+2}-2$ est divisible par 7. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $3^{6n-4}-2$ est divisible par 7.

18 **a.** Au rang 1 : $4^1-1-3=0$ est bien divisible par 9.

On suppose que 4^n-1-3n est divisible par 9, $n \in \mathbb{N}^*$ et on montre que $4^{n+1}-4-3n$ est divisible par 9.

Donc il existe un entier p tel que $4^n-1-3n=9p$. Or :

$$4^{n+1}-4-3n=4\times 4^n-4-3n=4(9p+3n+1)-4-3n=9(4p+n) .$$

Donc $4^{n+1}-4-3n$ est divisible par 9. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, 4^n-1-3n est divisible par 9.

b. Au rang 0 : $7\times 3^0+4=11$ est bien divisible par 11.

On suppose que $7\times 3^{5n}+4$ est divisible par 11 avec $n \in \mathbb{N}$ et on montre que $7\times 3^{5n+5}+4$ est divisible par 11.

$7\times 3^{5n}+4$ est divisible par 5 ou 11, donc il existe un entier p tel que $7\times 3^{5n}+4=11p$. Or :

$$7\times 3^{5n+5}+4=7\times 3^5\times 3^{5n}+4=3^5(11p-4)+4=11(3^5 p-22) .$$

Donc $7\times 3^{5n+5}+4$ est divisible par 11. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $7\times 3^{5n}+4$ est divisible par 11.

19 Au rang 1 : $1!=1$ et $2^{n-1}=1$, ainsi $1! \geqslant 2^{1-1}$.

On suppose que $n! \geqslant 2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et on montre que $(n+1)! \geqslant 2^n$.

$n! \geqslant 2^{n-1}$, ainsi $(n+1)n! \geqslant 2^{n-1}(n+1) \geqslant 2^{n-1}\times 2$,

d'où $(n+1)! \geqslant 2^n$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n! \geqslant 2^{n-1}$.

20 On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n = \frac{1}{4}$.

Au rang 0 : $u_0 = \frac{1}{4}$.

On suppose que $u_n = \frac{1}{4}$, $n \in \mathbb{N}$ et on montre que $u_{n+1} = \frac{1}{4}$.

On a $u_{n+1} = 5u_n - 1 = 5 \times \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4}$, car $u_n = \frac{1}{4}$, d'où $u_{n+1} = \frac{1}{4}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{4}$.

22 Au rang 0 : $u_0 = 8$ par hypothèse et $3\left(\frac{2}{5}\right)^0 + 5 = 3 + 5 = 8$.

On suppose que $u_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$ avec $n \in \mathbb{N}$ et on montre que :

$$u_{n+1} = 3\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} + 5 .$$

$u_{n+1} = \frac{2}{5}\, u_n + 3 = \frac{2}{5}\left(3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5\right) + 3 = 3\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} + 5$, car $u_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$,

d'où :
$$u_{n+1} = 3\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} + 5 .$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5$.

23 Au rang 0 : $u_0 = 3 - 2^1 = 1$.
On suppose que $u_n = 3 - 2^{n+1}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et on montre que $u_{n+1} = 3 - 2^{n+2}$.
On a $u_{n+1} = 2u_n - 3 = 2(3 - 2^{n+1}) - 3$, car $u_n = 3 - 2^{n+1}$,
d'où : $u_{n+1} = 3 - 2^{n+2}$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3 - 2^{n+1}$.

24 Au rang 0 : $u_0 = \frac{11}{4} \times 3^0 - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times 0 = 2$.

On suppose que $u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\, n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et on montre que :

$u_{n+1} = \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\,(n+1)$.

On a $u_{n+1} = 3u_n + n + 1 = 3\left(\frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\, n\right) + n + 1$, car :

$u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\, n$, d'où :

$$u_{n+1} = \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{5}{4} - \frac{1}{2}\, n = \frac{11}{4} \times 3^{n+1} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\,(n+1) .$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{11}{4} \times 3^n - \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\, n$.

25 Au rang 1 : $u_1 = 2(2^{1-1}+1)+n = 5$.

On suppose que $u_n = 2(2^{n-1}+1)+n$, $n \in \mathbb{N}^*$ et on montre que $u_{n+1} = 2(2^n+1)+n+1$.

On a $u_{n+1} = 2u_n - (n+1) = 2(2(2^{n-1}+1)+n) - (n+1)$,

car $u_n = 2(2^{n-1}+1)+n$,

d'où : $u_{n+1} = 2 \times 2^n + 4 + 2n - n - 1 = 2(2^n+1)+n+1$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2(2^{n-1}+1)+n$.

26 Au rang 1 : $u_1 = \dfrac{1}{2^1} = \dfrac{1}{2}$.

On suppose que $u_n = \dfrac{n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et on montre que $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}}$.

On a $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} \times u_n = \dfrac{n+1}{2n} \times \dfrac{n}{2^n}$, car $u_n = \dfrac{n}{2^n}$,

d'où $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2} \times \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{n}{2^n}$.

27 Au rang 1 : $u_1 = 2 + \dfrac{1}{3^1 - 1} = \dfrac{5}{2}$.

On suppose que $u_n = 2 + \dfrac{1}{3^n - 1}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et on montre que :

$$u_{n+1} = 2 + \frac{1}{3^{n+1} - 1} .$$

On a $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 4}{2u_n - 1} = \dfrac{5\left(2 + \dfrac{1}{3^n - 1}\right) - 4}{2\left(2 + \dfrac{1}{3^n - 1}\right) - 1}$, car $u_n = 2 + \dfrac{1}{3^n - 1}$, d'où :

$$u_{n+1} = \frac{6 + 5 \times \dfrac{1}{3^n - 1}}{3 + 2 \times \dfrac{1}{3^n - 1}} = \frac{6(3^n - 1) + 5}{3(3^n - 1) + 2} = \frac{2(3^{n+1} - 1) + 1}{3^{n+1} - 1} = 2 + \frac{1}{3^{n+1} - 1} .$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2 + \dfrac{1}{3^n - 1}$.

28 **1.** $u_1 = 1$, $u_2 = 4$, $u_3 = 9$, $u_4 = 16$ et $u_5 = 25$.

2. On peut conjecturer que $u_n = n^2$.

3. Au rang 0 : $u_0 = 0^2 = 0$.

On suppose que $u_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, et on montre que $u_{n+1} = (n+1)^2$.

On a $u_{n+1} = u_n + 2n + 1 = n^2 + 2n + 1$, car $u_n = n^2$,

d'où $u_{n+1} = (n+1)^2$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = n^2$.

29 On va montrer en utilisant une récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n = 4$.

Au rang 0 : $u_0 = 4$. On suppose que $u_p = 4$ pour tout entier naturel p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, $n \in \mathbb{N}$ et on montre que $u_{n+1} = 4$.

On a $u_{n+1} = \frac{5}{2}u_n - \frac{3}{2}u_{n-1} = \frac{5}{2} \times 4 - \frac{3}{2} \times 4$, car $u_n = 4$ et $u_{n-1} = 4$, d'où $u_{n+1} = 4$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4$.

30 Au rang 1 : $u_1 = (-2)^1 - 3 \times (-1)^1 = -2 + 3 = 1$.

On suppose que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a, pour tout entier naturel p tel que $1 \leqslant p \leqslant n$,

$u_p = (-2)^p - 3 \times (-1)^p$, et on montre que :

$u_{n+1} = (-2)^{n+1} - 3 \times (-1)^{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -3u_n - 2u_{n-1} = -3((-2)^n - 3 \times (-1)^n) - 2((-2)^{n-1} - 3 \times (-1)^{n-} \\ &= -3(-2)^n + 9(-1)^n + (-2)^n + 6(-1)^{n-1} \\ &= -2(-2)^n + 9(-1)^n - 6(-1)^n \\ &= (-2)^{n+1} + 3(-1)^n = (-2)^{n+1} - 3(-1)^{n+1} , \end{aligned}$$

car $u_n = (-2)^n - 3 \times (-1)^n$ et $u_{n-1} = (-2)^{n-1} - 3(-1)^{n-1}$, d'où :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -3(-2)^n + 9(-1)^n + (-2)^n + 6(-1)^{n-1} \\ &= -2(-2)^n + 9(-1)^n - 6(-1)^n \\ &= (-2)^{n+1} + 3(-1)^n = (-2)^{n+1} - 3(-1)^{n+1} . \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-2)^n - 3 \times (-1)^n$.

31 **1.** Au rang 0 : $u_0 = 2$ et $u_1 = 6$ par hypothèse, donc $u_1 = 3u_0$.

On suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, on a, pour tout entier naturel p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, $u_{p+1} = 3u_p$, et on montre que $u_{n+2} = 3u_{n+1}$.

On a $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n$ or $u_{n+1} = 3u_n$, d'où :

$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9 \times \frac{1}{3} \times u_{n+1} = 3u_{n+1}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 3u_n$.

2. On en déduit que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 2 \times 3^n$.

32 **1.** $u_2 = 3u_1 - 2u_0$, donc $5 = 3u_1 - 4$, soit $u_1 = 3$, $u_3 = 9$, $u_4 = 17$, $u_5 = 33$ et $u_6 = 65$.

2. On peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$.

3. Au rang 0 : $u_0 = 2$ et $u_1 = 3$, donc $3u_1 - 2u_0 = 5$ or $u_2 = 5$.
On suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, on a pour tout entier naturel p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, $u_p = 2^p + 1$, et on montre que $u_{n+1} = 2^{n+1} + 1$.
On a $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$ or $u_n = 2^n + 1$ et $u_{n-1} = 2^{n-1} + 1$ d'après l'hypothèse de récurrence, d'où :

$$u_{n+1} = 3(2^n + 1) - 2(2^{n-1} + 1) = 3 \times 2^n + 3 - 2^n - 2$$
$$= 2 \times 2^n + 1 = 2^{n+1} + 1 .$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 1$.

33 **1.** Au rang 0 : $|\sin(0 \times x)| = 0$ et $0 \times |\sin x| = 0$, donc $|\sin(0 \times x)| \leqslant 0 \times |\sin x|$.
On suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$ et on montre que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|\sin((n+1)x)| \leqslant (n+1)|\sin x|$. On a :

$$|\sin((n+1)x)| = |\sin(nx)\cos(x) + \cos(nx)\sin(x)|$$
$$\leqslant |\sin(nx)| \times |\cos(x)| + |\cos(nx)| \times |\sin(x)|$$
$$\leqslant |\sin(nx)| \times 1 + 1 \times |\sin(x)| \leqslant n|\sin(x)| + |\sin(x)| ,$$

d'où : $|\sin((n+1)x)| \leqslant (n+1)|\sin x|$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $|\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$.

ET POUR LES COURAGEUX !!!

34 Au rang 1 : $f'(x) = -2\sin(2x)$

et $2^1 \cos\left(2x + 1 \times \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -2\sin(2x)$.

On suppose que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a, pour tout réel x :

$f^{(n)}(x) = 2^n \cos\left(2x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$, et on montre que pour tout réel x :

$f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1} \cos\left(2x + (n+1)\,\frac{\pi}{2}\right)$. On a :

$$f^{(n+1)}(x) = 2^n \times (-2)\sin\left(2x + n\,\frac{\pi}{2}\right),$$

or $2^{n+1}\cos\left(2x + (n+1)\,\frac{\pi}{2}\right) = 2^{n+1}\left(-\cos\left(2x + n\,\frac{\pi}{2}\right)\right)$, donc :

$$f^{(n+1)}(x) = 2^{n+1}\cos\left(2x + (n+1)\,\frac{\pi}{2}\right).$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout réel x, $f^{(n)}(x) = 2^n \cos\left(2x + n\,\frac{\pi}{2}\right)$.

35 Au rang 1 : $\forall x \in\,]2\,;+\infty[$,

$f'(x) = \dfrac{2(x-2) - (2x+1) \times 1}{(x-2)^2} = \dfrac{-5}{(x-2)^2} = 5(-1)^1 \times \dfrac{1!}{(x-2)^{1+1}}$.

On suppose que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a, $\forall x \in\,]2\,;+\infty[$

$f^{(n)}(x) = 5(-1)^n \dfrac{1!}{(x-2)^{n+1}}$, et on montre que $\forall x \in\,]2\,;+\infty[$

$f^{(n+1)}(x) = 5(-1)^{n+1} \dfrac{(n+1)!}{(x-2)^{n+2}}$. On a :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= 5(-1)^n n! \times (-(n+1)) \frac{1}{(x-2)^{n+2}} \\ &= 5(-1)^{n+1}(n+1)! \times \frac{1}{(x-2)^{n+2}}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in\,]2\,;+\infty[$, $f^{(n)}(x) = 5(-1)^n \dfrac{n!}{(x-2)^{n+1}}$.

Si vous trouvez des erreurs il faut m’écrire !