INTEGRATION

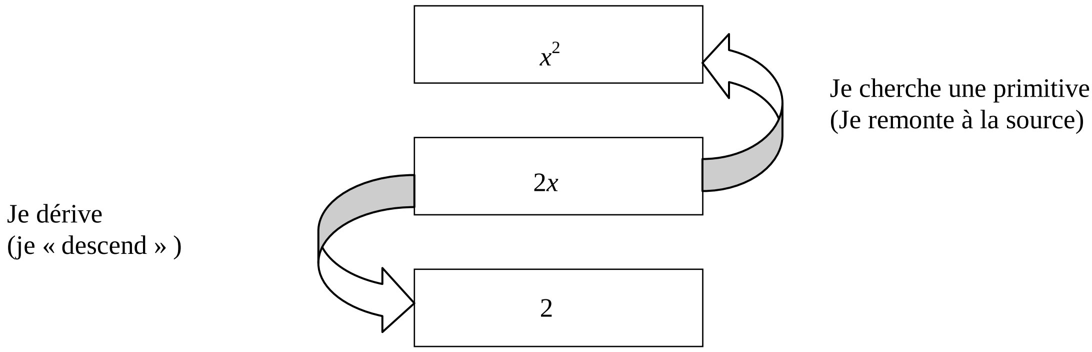
I)PRIMITIVES

1°) Etude d'un exemple simple

On sait très facilement calculer la dérivée de la fonction f (x)=2x ; c'est f '(x) = 2 .
On veut savoir maintenant ce que l'on va obtenir si on fait le chemin « à l'envers ».En effet je voudrais trouver une fonction F dont la dérivée est f c'est-à-dire que je cherche F telle que F '(x)= 2x.

Ici il est facile de voir que la fonction F(x) = x^2 est une solution à notre problème.

On dit que F est une **primitive** de f. On peut symboliser la démarche à l'aide du schéma ci-dessous :



Exercice

Etant donnée une fonction f déterminer une primitive de f c'est- à - dire une fonction F telle que F'(x) = f (x) :

a) f (x) = 2 b) g (x) = 3 x^2 c) h(x) = 4 x^3 .

2°) Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur I. Une fonction F définie sur I est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I

et que $\boxed{F' = f}$

Exemples :

- f(x)= 1 une primitive de f est alors F(x)= x . Vérification : F'(x)= 1
- f(x)=x une primitive de f est alors F(x)= ½ x^2 . Vérification : F'(x)= 2(½ x) = x
- f(x)= $\dfrac{1}{x}$ pour x dans I =]0 ; + ∞[une primitive de f sur I est alors F(x)= ln x . Vérification F'(x) = $\dfrac{1}{x}$

3°) Ensemble des primitives d'une fonction

Observation : si G(x) = C où C est une constante réelle ,quelle est sa dérivée g(x) ?

Donc toute constante réelle C est UNE PRIMITIVE de la fonction nulle.

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur I et F **une** primitive de f sur I. Les primitives de f sur I sont alors toutes les fonctions définies sur I par $x \rightarrow F(x) + C$ où C est une constante réelle .

Exemples : a)Donner les primitives de la fonction $f(x)= 3x^2$; ce sont les fonctions $x \rightarrow x^3 + C$ où $C \in R$.

b) Donner l'ensemble des primitives de la fonction $f(x)= 4x^3$; c'est l'ensemble des fonctions $x \rightarrow x^4 + C$ où $C \in R$.

Théorème 2

Soit f une fonction définie et dérivable sur I.
Parmi les primitives de f définies sur I il en existe **une et une seule** telle que $F(x_0) = y_0$.
En particulier la fonction $x \rightarrow F(x) - F (a)$ est la seule primitive de f qui s'annule en a.

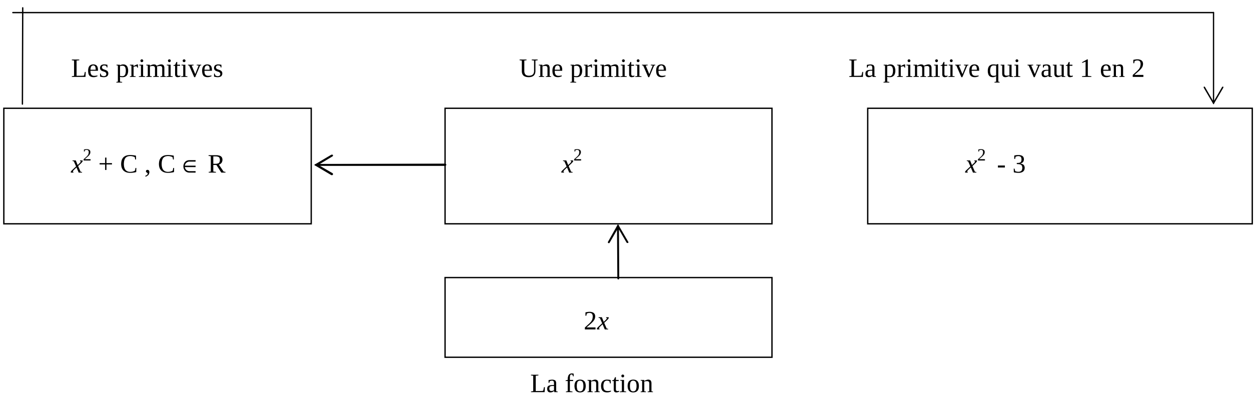
Exemple : Déterminer la primitive F_0 de la fonction f définie sur R par $f(x)= 3x^2$ telle que $F_0 (1) = 0$.

On sait que F_0 s'écrit $F_0 (x) = x^3 + C$. On va donc déterminer C pour que $F_0 (1) = 0$

On remplace donc x par 1 et on obtient $F_0 (1) = (1)^3 + C = 0$ soit $1 + C = 0$. Ce qui donne $C = - 1$.

La primitive cherchée est donc $F_0 (x) = x^3 - 1$.

Remarque : On fera donc bien la différence entre
une primitive de f (on donne généralement la fonction la plus simple qui répond à la question)
Les primitives de f (c'est la fonction trouvée ci-dessus + C où $C \in R$)
La primitive de f vérifiant une condition (On cherche la constante réelle C pour laquelle la condition est vérifiée)



Exercice
Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x^2$, déterminer :
a) Une primitive de f sur R .
b) Les primitives de f sur R.
c) La primitive de f qui vaut 0 en -1 .

a) $F(x) =1/3\, x^3$
b) Les primitives sont les fonctions $x \rightarrow 1/3x^3+C$, C ds R
c) La primitive cherchée est la fonction $x \rightarrow 1/3x^3 - 1/3$

4°) Savoir montrer qu'une fonction donnée F est une primitive sur I d'une fonction f

Soit f une fonction définie et dérivable sur I .
Pour démontrer qu'une fonction F donnée est une primitive de f il suffit de vérifier que F'(x) = f (x) pour tout x de I.

Exemple : Soit f (x) = $x^3 + 3x^2 - 2$.Montrer que la fonction F définie par F (x) = $\frac{1}{4} x^4 + x^3 - 2x + 3$ est une primitive de f sur R.F'(x) = $4(\frac{1}{4} x^3) + 3x^2 - 2$ = f (x) donc F est une primitive de f sur R.

Exercice : Montrer que la fonction donnée F est une primitive de f sur I

c) $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ $\quad F(x) = -\dfrac{1}{x-2}$ $\quad I = [3 ; 100]$

Il suffit de dériver F(x)

5°) Primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées

a) Tableau

f	Df	F	DF
0	R	C	R
a		$ax + C$	
x		$\frac{1}{2} x^2 + C$	
x^2		$\dfrac{x^3}{3}$	
x^n		$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad n \in N^*$	
$\dfrac{1}{x^2}$	R*	$-\dfrac{1}{x}$	R*
$\dfrac{1}{x^3}$	R*	$-\dfrac{1}{2x^2}$	R*
$\dfrac{1}{x^n}$	R*	$-\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{x^{n-1}}$ n entier naturel n ≥ 2	R*
$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	R^+	$\sqrt{x}$	R^{+*}
$\dfrac{1}{x}$	$]0 ;+\infty[$	$\ln x$	$]0 ;+\infty[$
e^x	R	e^x	R
$\cos x$		$\sin x$	
$-\sin x$		$\cos x$	
$1 + \tan^2 x$	$]-\pi/2 ;\pi/2[$	$\tan x$	
$\cos(ax + b)$		$\text{Sin}(ax+b)/a$	
$\sin(ax + b)$		$-\cos(ax+b)/a$	
x^α α dans R – { -1 }	$]0;+\infty[$	$x^{\alpha+1}/\alpha+1$	$]0;+\infty[$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1;1[$	$\text{Arcsin}x$	[-1;1]
$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	"	$\text{Arccos}x$	"
$\dfrac{1}{1+x^2}$	R	$\text{Arctan}x$	R

b) Opérations

En s'appuyant sur les résultats concernant les opérations sur les fonctions dérivables, on établit que :

> Si F est une primitive de f sur un intervalle I et G est une primitive de g sur un intervalle I alors :
>
> - F + G est une primitive de f + g
> - aF est une primitive de af où a est une constante réelle.

Exemples :

a) Une primitive de $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{x^2}$ sur I = [1 ;10] est $F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 1/x$

b) Une primitive de $f(x) = 5x^3$ sur R est $F(x) = 5(\frac{1}{4}x^4) = \dfrac{5}{4}x^4$.

c)Conséquences des formules de dérivation

Fonction	Primitive	EXEMPLES : Dans chaque cas calculer les primitives de la fonction donnée sur I.
$U'.U$	$\frac{1}{2}U^2$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = 6x^2(2x^3+1)$ $F(x) = \frac{1}{2}(2x^5+1)^2 + C$, C dans R
$U'.U^n$, $n \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{U^{n+1}}{n+1}$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (2x+1)(x^2+x)^2$ $F(x) = \dfrac{1}{3}(x^2+x)^3 + C$, C dans R
$\dfrac{U'}{U^2}$ ($U \neq 0$ sur I)	$-\dfrac{1}{U}$ ($U \neq 0$ sur I)	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$ $F(x) = -\dfrac{1}{x^2+1} + C$, C dans R
$\dfrac{U'}{U^n}$ ($U \neq 0$ sur I) n entier et $n \geq 2$	$-\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{1}{U^{n-1}}$ ($U \neq 0$ sur I) n entier et $n \geq 2$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \dfrac{2x+3}{(x^2+3x+3)^3}$ $F(x) = -\dfrac{1}{2(x^2+3x+3)^2} + C$, C dans R
$\dfrac{U'}{\sqrt{U}}$ ($U > 0$ sur I)	$2\sqrt{U}$	Soit f la fonction définie sur R^+ par $f(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{(x^3+1)}}$ $F(x) = 2\sqrt{(x^3+1)} + C$, C dans R
$\dfrac{U'}{U}$ ($U \neq 0$ sur I)	$\ln\lvert U \rvert$	Soit f la fonction définie sur R^+ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$ $F(x) = \ln(x^2+x+1) + C$, C dans R car $x^2+x+1>0$ sur R
$U' e^U$	e^U	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = 2xe^{x2+1}$ $F(x) = e^{x2+1}$

<u>**Exemple**</u> : Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x(x^2+1)$. Donner la primitive de f qui s'annule en 1.

<u>Méthode</u> : d'abord on essaie d'identifier la formule que l'on va utiliser , ici U'U .
Cependant si $U(x) = x^2 + 1$ alors $U'(x) = 2x$ et non x . On va donc **« faire apparaître » U'(x)** .

$f(x) = \frac{1}{2}[\,2x(x^2+1)]$ d'où $F(x) = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(x^2+1)^2] + C = \frac{1}{4}(x^2+1)^2 + C$ où C dans R. Comme F(1) =0 on a C = - 1 et $F(x) = \frac{1}{4}(x^2+1)^2 - 1$.

6°) Primitives d'une fonction rationnelle à pôles réels simples

Soit f la fonction définie sur R\ { -1 ; 2} par $f(x) = \dfrac{2x+1}{(x+1)(x-2)}$

Ici -1 et 2 sont des pôles simples de $f(x)$.

Soit g la fonction définie sur R\ { -1 ; 2} par $g(x) = \dfrac{2x+1}{(x+1)^2(x-2)}$

Ici 2 est un pôle simple de $g(x)$; mais -1 n'est pas un pôle simple.(- 1 est une racine double du dénominateur !)

Définition

Soit f une fonction rationnelle simplifiée. $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$

On dit que a est un pôle simple de f si a est une racine simple de son dénomonateur.

Théorème dans le cad où d°N≥ d°D

Soit f une fonction rationnelle simplifiée. $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)}$ avec **d°N≥ d°D**

Alors il existe un unique couple de polynômes (Q,R) tels que , **pour D non nul**

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$ avec d° Q = d°N – d° D et d°R<d°D

Exemple : Transformons la fraction $f(x) = \dfrac{x^3-2}{x^2+x-2}$

N(x) = $x^3 - 2$
Et d°N = 3

Q(x) = ax +b
Et d°Q = **d°N – d° D= 1 et d° R = 1**

$$\frac{x^3-2}{x^2+x-2} = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+x-2}$$

D(x) = $x^2 + x + 1$
Et d°D = 2

Donc $f(x) = \dfrac{ax^3 + (a+b)x^2 + (-2a+b+c)x + d - 2b}{x^2+x-2}$

Par identification $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ -2a + b + c = 0 \\ d - 2b = -2 \end{cases}$ soit $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 3 \\ d = -4 \end{cases}$ $\dfrac{x^3-2}{x^2+x-2} = x - 1 + \dfrac{3x-4}{x^2+x-2}$

Exercice : même exercice avec $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x + 1}$

....

....

....

....

Décomposition en éléments simples

Théorème

Soit f une fonction rationnelle simplifiée avec $f(x) = \dfrac{cx + d}{(x - a)(x - b)}$ où a et b sont des pôles réels simples.

Alors il existe un unique couple de réels (m , p) tels que

$$f(x) = \frac{\mathbf{m}}{x - a} + \frac{\mathbf{p}}{x - b}$$

Remarque : le théorème reste vrai si $f(x) = \dfrac{N(x)}{D(x)} = \dfrac{N(x)}{(x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)}$ avec d°N<d°D.

Exemple :On décompose la fraction $g(x)$ en éléments simples

$$G(x) = \frac{3x - 4}{x^2 + x - 2} = \frac{3x - 4}{(x - 1)(x - 2)} = \frac{m}{x - 1} + \frac{p}{x - 2} = \frac{(m + p)x - (p + 2m)}{x^2 + x - 2}$$

Par identification on obtient $\begin{cases} m + p = 3 \\ 2m + p = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} m = 1 \\ p = 2 \end{cases}$

$$\frac{3x - 4}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{x - 2}$$

Exercice : même exercice avec $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2}$

....

Conséquences : primitives d'une fonction rationnelle

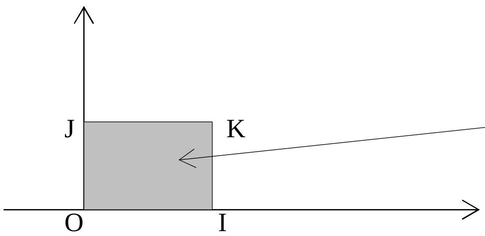
Exercice : Déterminer une primitive de la fonction définie sur [6 ;8] par $f(x) = \dfrac{x + 4}{x^2 - 7x + 10}$

Exercice : Déterminer une primitive de la fonction définie sur R par $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$

II) INTEGRALES

IMPORTANT : l' UNITE D'AIRE

Soit (O ; i ; j) repère orthogonal du plan . OI = i et OJ = j ;



L'aire du rectangle OIKJ est 1 unité d'aire , on a donc :

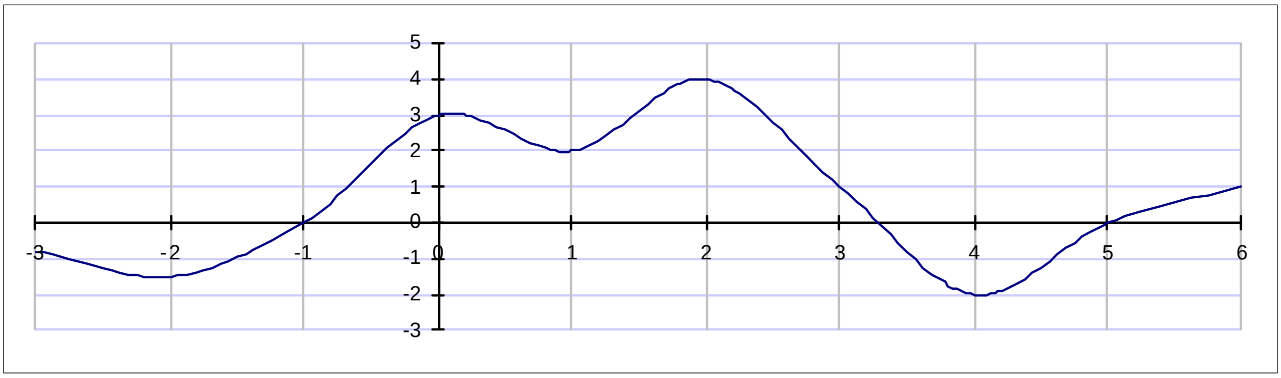
1 u.a. = OI *x* OJ = ||i||*x*||j||

Exemples :

- Si || i || = || j || = 1 cm alors l'unité d'aire est 1 cm^2
- Si || i || = || j || = 2 cm alors l'unité d'aire est 4cm^2
- Si || i || =2 et || j || = 1 cm alors l'unité d'aire est 2 cm^2

Remarque : **une fonction CONTINUE est une fonction dont la courbe « n'a pas de trou »**

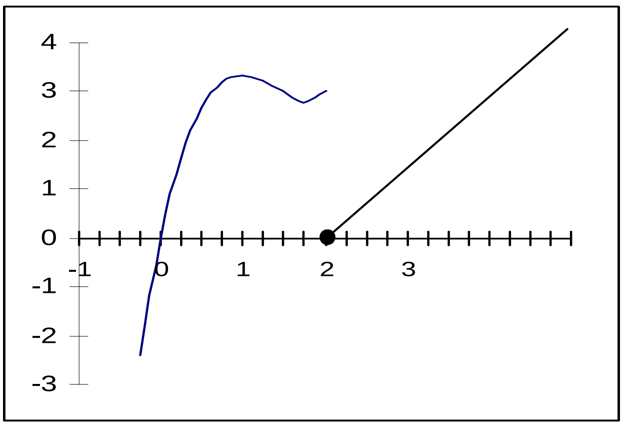
La fonction représentée ci – dessous est continue sur [-3 ; 6]



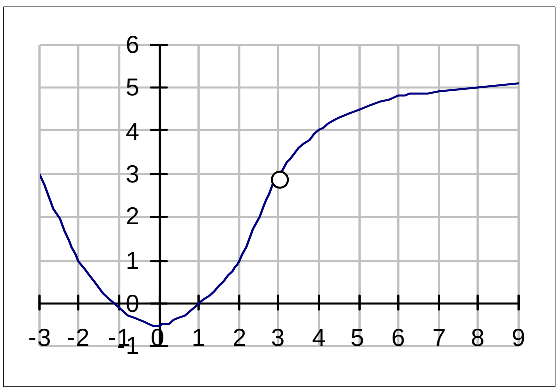
Les fonctions polynôme , rationnelle, irrationnelle, trigonométrique, ln ,*exp*, et la fonction valeur absolue sont continues sur chaque intervalle qui compose leur ensemble de définition.

Contre – exemples :

1)La fonction g est définie sur]-1 ;5] mais n'est pas continue en 2.



2) La fonction h n'est pas continue en 3 car **elle n'est pas définie en 3.**



A) Intégration.

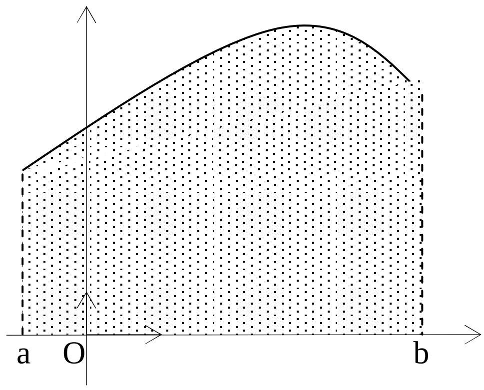
1°) Définition

Soit f une fonction

CONTINUE ET POSITIVE
sur un intervalle [a ; b]
et C sa courbe représentative dans le repère (O ; i , j).
Soit (E) le domaine du plan délimité par

l'axe (Ox),
la courbe C et
les droites d'équations x = a et x = b
(On peut écrire aussi que M (x ; y) dans (E) ssi

$a \le x \le b$ et $0 \le y \le f(x)$)
L'aire A de la partie (E) , est notée $\int_a^b f(x)dx$



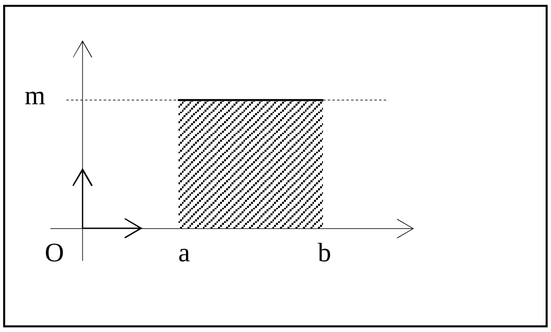
Remarques : 1) On lit « intégrale de a à b de f de x dx »

2) On dit que la variable est muette : $\int f(x)\,dx = \int f(u)\,du = \int f(t)\,dt$

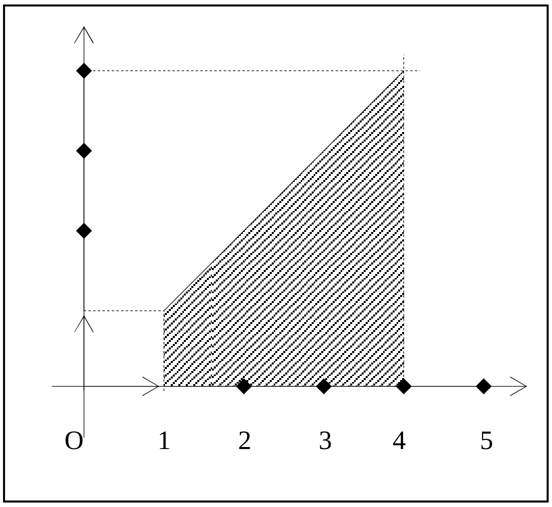
3) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

4) Pour m > 0 $\int_a^b m\,dx = m(b - a)$

(aire du rectangle grisé)



5) $\int_1^4 x\,dx =$



2°) Valeur moyenne d'une fonction

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b] avec **a < b** .On appelle valeur moyenne de f sur [a, b] le nombre réel

$$\frac{1}{b-a}\int_{b}^{a} f(x)\,dx$$

B) Intégrale et primitive

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un élément quelconque de I.

La fonction $\varphi(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Exemple : $\ln x = \int_{1}^{x} \frac{1}{t}\,dt$

Intégrale et primitive

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Pour tous réels a et b de I , on a :

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \left[F(x) \right]_{a}^{b}$$

où F est une primitive quelconque de f sur I.

Exemples :

1) $\int_{1}^{2} (x^2 + x + 1)\,dx = \left[x^3/3 + x^2/2 + x \right]_{1}^{2} = (8/3 + 4/2 + 2) - (1/3 + ½ + 1) = 7/3 + 3/2 + 1 = 29/6$

2) $\int_{0}^{1} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x} \right]_{0}^{1} = -e^{-1} - (-e^{0}) = 1 - 1/e$

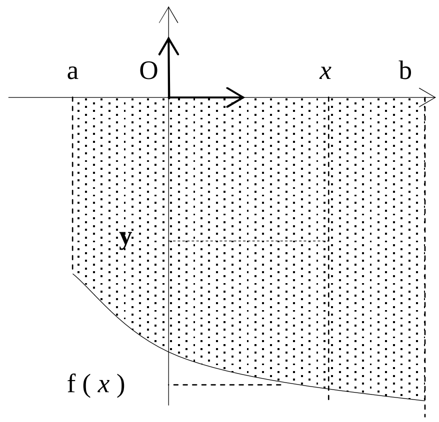
3) $\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x}\,dx = \left[(\ln x)^2/2 \right]_{1}^{e} = ½$

C) Intégrale d'une fonction de signe quelconque. Interprétation en terme d'aire

Cas d'une fonction négative

Soit f une fonction continue et **négative** sur un intervalle [a , b] .
Si A est l'aire du domaine (E) du plan délimité par l'axe (Ox), la courbe C et les droites d'équations x = a et x = b c'est – à – dire l'ensemble des points M (x ; y) tels que $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq 0$ est

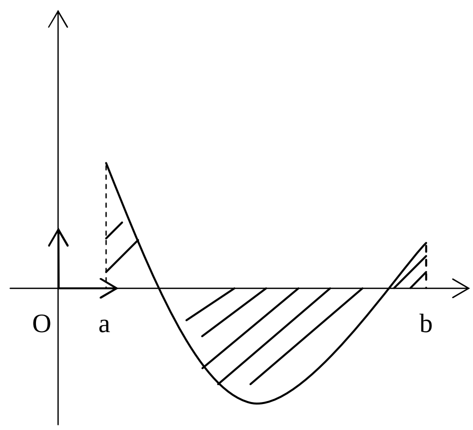
$$A = -\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{u.a.}$$



Cas d'une fonction changeant de signe

Soit f une fonction **continue qui change de signe** sur un intervalle [a , b] et C sa représentation graphique.
Si A_1 est l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe (Ox), la partie de la courbe C située au – dessus de l'axe (Ox) et les droites d'équations x = a et x = b c'est – à – dire
l 'ensemble des points M (x ; y) tels que $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$
et si A_2 est l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe (Ox), la partie de la courbe C située en – dessous de l'axe (Ox) et les droites d'équations x = a et x = b c'est – à – dire
l 'ensemble des points M (x ; y) tels que $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq 0$
On pose alors

$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 \text{ u.a}$$



Remarque : On peut alors étendre la notion de valeur moyenne à une fonction f seulement continue et de signe quelconque.

Exemples de calculs d'aires

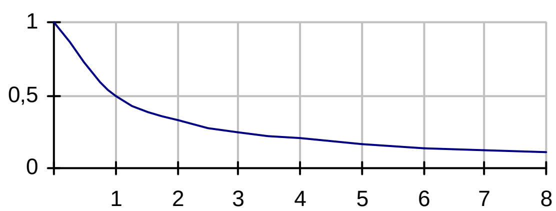
Exemple1 :

Soit $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et sa courbe représentative dans le repère ci-contre .Unités : 1 cm en abscisses ; 2 cm en ordonnées

1°) Hachurer la partie E des points M(x ; y) tels que
$0 \leq x \leq 2$
$0 \leq y \leq f(x)$

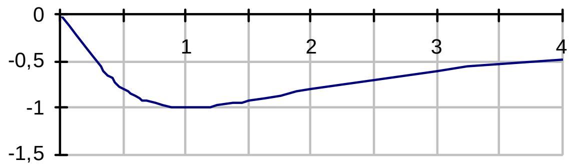
2°) Calculer la valeur exacte de l'aire de A en U.a.

3°) En déduire l'aire de A en cm^2 .



Exemple 2:

Soit $f(x) = -\dfrac{2x}{x^2+1}$ et sa courbe représentative dans le repère ci-contre .Unités : 2 cm en abscisses ; 2 cm en ordonnées



1°) Hachurer la partie E des points M(x ; y) tels que

$1 \leq x \leq 3 \qquad f(x) \leq y \leq 0$

2°) Calculer la valeur exacte de l'aire de A en U.a.

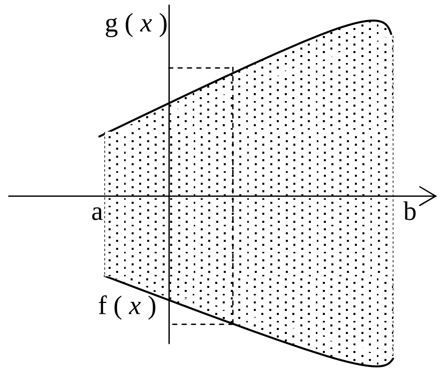
3°) En déduire l'aire de A en cm^2 .

Aire de la partie du plan délimitée par deux courbes représentatives

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle [a , b] , telles que pour tout x de [a , b], $f(x) \leq g(x)$.

L'aire A de la partie du plan , ensemble des points M (x ; y) tels que $a \leq x \leq b$ et $f(x) \leq y \leq g(x)$ est

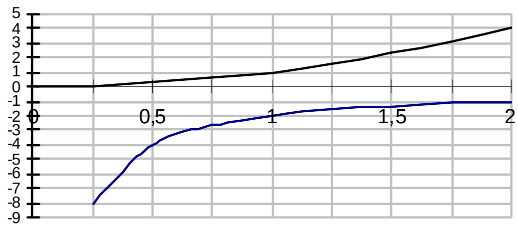
$$A = \int_a^b [\,g(x) - f(x)\,]\,dx \quad \text{u.a.}$$



Exemple :

Soit $f(x) = -\dfrac{2}{x}$ et sa courbe représentative C_f dans le repère ci-contre .

Et soit $g(x) = x^2$ et sa courbe représentative C_g dans le même repère. Unités : 0.5 cm en abscisses ; 4 cm en ordonnées



1°) Hachurer la partie E des points M(x ; y) tels que

$\frac{1}{4} \leq x \leq 1$

$f(x) \leq y \leq g(x)$

2°) Calculer la valeur exacte de l'aire de A en U.a.

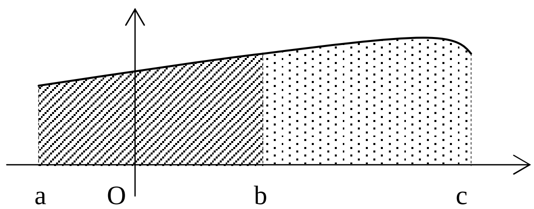
3°) En déduire l'aire de A en cm^2 .

3°) Propriétés de l'intégrales

a) Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b, c des éléments de I.

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

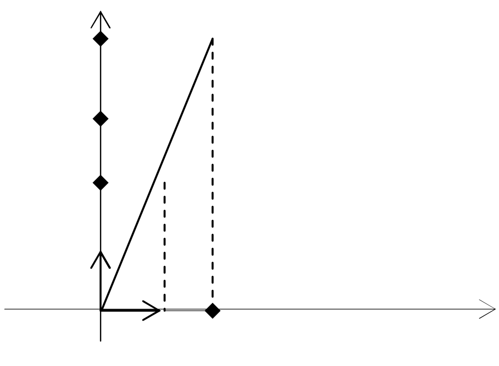


Exemple :

$$\int_0^1 2x\,dx = \Big[\,x^2\,\Big]_0^1 = 1$$

$$\int_1^2 2x\,dx = \Big[\,x^2\,\Big]_1^2 = 3$$

$$\int_0^2 2x\,dx = \Big[\,x^2\,\Big]_0^2 = 4 = 1 + 3 .$$



b)Linéarité

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a et b deux éléments de I.

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [\,f(x) + g(x)\,]\,dx$$

Pour tout nombre réel λ ,

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

Exemples:

1) $$\int_0^1 (x^2 + x + 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{11}{6}$$

$$\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3} \qquad \int_0^1 (x+1)\,dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

On a bien $\frac{1}{3} + \frac{3}{2} = \frac{11}{6}$.

2) $$\int_{-1}^3 5x\,dx = \left[\frac{5x^2}{2}\right]_{-1}^3 = 45/2 - 5/2 = 40/2 = 20 \quad \text{et} \quad \int_{-1}^3 x\,dx = \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^3 = 4$$

Exercices : Calculer 1°) $\int_0^{\pi/2} \cos t + \sin t \;dt =$

2°) $\int_0^1 \frac{x + 1}{3x^2 - 2x - 1}\,dx =$

c)Antisymétrie

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

4°) Comparaison d'intégrales

Positivité

Soit f une fonction dérivable et positive sur un intervalle I

et a et b deux éléments de I. Si $a \leq b$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

Signe d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I

et a et b deux éléments de I.

	Si a < b	Si a > b
Si f ≥ 0 sur I	$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$	$\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$
Si f ≤ 0 sur I	$\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$	$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

Intégration d'une inégalité

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et a et b deux éléments de I.

Si $a \leq b$ et si pour tout réel x de [a ; b] $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Exemple :

Grâce à ce théorème on peut encadrer la valeur d'une intégrale que l'on ne sait pas calculer.

On sait que la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ est pour tout x de [0 ; 1] telle que $-\frac{1}{2}x + 1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{2}x^2 + 1$

On en déduit alors d'après le théorème que $\int_0^1 (-\frac{1}{2}x + 1)\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 (-\frac{1}{2}x^2 + 1)\,dx$

Soit $\left[-\frac{1}{4}x^4 + x\right]_0^1 \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \left[-\frac{1}{6}x^2 + x\right]_0^1$ soit finalement $\frac{3}{4} \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{5}{6}$

Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle I=[a,b]

S'il existe des réels m et M tels que $m \leq f(x) \leq M$ pour tout x de I alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

Majoration de la valeur absolue d'une intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I = [a ; b]

S'il existe un réel M tel que $|f(x)| \leq M$ alors $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq M|b-a|$

5°) INEGALITES DES ACCROISSEMENTS FINIS

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle [a,b] dont la dérivée f ' est continue sur [a,b]. S'il existe deux réels tels que pour tout x de [a,b] $m \leq f'(x) \leq M$ alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$

En particulier, si $|f'(x)| \leq M$ alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$

6°) Intégrations par parties

Théorème

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I, telles que u' et v' sont continues sur I. Pour tous réels a et b de I, on a :

$$\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = [\,u(x)\,v(x)\,]_a^b - \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$$

Exemple : $\int_1^e x \ln x\,dx = [x^2 \ln x/2]_1^e - \int_1^e x/2\,dx = e^2/2 - [x^2/4]_1^e = e^2/4 - 1/4$

Attention de bien choisir u et v car sinon on peut « aggraver » les choses et ne rien pouvoir calculer

Ainsi ici $u'(x) = x$ et $v(x) = \ln x$ car il est difficile de trouver une primitive de $\ln x$!

$u'(x) = x$ donc $u(x) = x^2/2$
$v(x) = \ln x$ donc $v'(x) = 1/x$

7°) Changement de variable

Exemple 1 : U(x) = x + m

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I= [a ;b + m] , où a, b, m dans R avec a≤b alors

$$\int_a^b f(x+m)\,dx = \int_{a+m}^{b+m} f(x)\,dx$$

On doit calculer

$$J = \int_3^7 (x+3)^2\,dx = \int_6^{10} x^2\,dx = [x^3/3]_6^{10} = 784/3$$

On pose U= x + 3 d'où les bornes sont 10 et 6 ; comme x = U – 3 et dx = dU

Exercice : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$ (On pourra remarquer que $x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1$

....

....

....

Exemple 2 : U(x) = kx avec k NON NUL

Soit f une fonction définie et continue ka et kb , où a, b, k dans R avec k non nul , alors

$$\int_a^b f(kx)\,dx = \frac{1}{k}\int_{ka}^{kb} f(x)\,dx$$

On doit calculer

$$J = \int_0^1 4x^2\,dx = \int_0^1 (2x)^2\,dx = \tfrac{1}{2}\int_0^2 x^2\,dx = [x^3/6]_0^2 = 4/3$$

Exercice : calculer $\displaystyle\int_{1/4}^1 \frac{dx}{1 + 16t^2}$

....

....

....

Théorème (Généralisation)

Soit U une fonction définie et dérivable sur un intervalle I = [a ;b] dont la dérivée est CONTINUE sur I.

Pour toute fonction f définie et continue sur l'intervalle U(I) , on a la formule , dit du « changement de variable » :

$$\int_{U(a)}^{U(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(U)\,dU = \int_a^b f[W(x)]\,W'(x)\,dx$$

avec U = w(x) et du = w'(x)dx càd $x = w^{-1}(x)$

Exemple 3 : U(x) = kx + m avec k NON NUL

On doit calculer

$$J = \int_0^1 4x^2 + 2x + 1\,dx = \int_0^1 (2x+1)^2\,dx = \int_1^3 u^2 \tfrac{1}{2}\,du = \int_1^3 x^2/2\,dx = [x^3/6] =$$

On pose u = W(x) = 2x + 1 d'où $x = ½ (u – 1)$ et les bornes sont 3 et 1
dx = ½ du

Exemple 4 :

$$K = \int_1^2 \frac{e^x}{e^x + 1}\,dx$$ (on pourra poser u = e^x)

$$K = \int_1^2 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int_e^{e^2} \frac{u}{u+1} \times \frac{1}{u}\,du = \int_e^{e^2} \frac{1}{u+1}\,du = [\ln(u+1)]_e^{e^2} = \ln\left(\frac{e^2+1}{e+1}\right).$$

On pose u = W(x) = e^x d'où x = ln u et les bornes sont e et e^2
dx = 1/u du

III) DEVELOPPEMENTS LIMITES

1°) Etude de l'exemple de la fonction exponentielle

On a déjà vu qu'au voisinage de 0

$$\boxed{e^{x} \approx 1 + x \text{ c'est – à dire } e^{x} = 1 + x + x\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0}$$

Graphiquement , au voisinage de 0, la courbe de la fonction exponentielle se « confond » avec la tangente au point d'abscisse 0

D'équation y = x + 1.On a donc pu approcher au voisinage de 0 la valeur de e^{x} par un polynôme d'ordre 1.

On démontre à l'aide du calcul intégral qu'en réalité on peut approcher la valeur de e^{x} au voisinage de 0 par un polynôme

d'ordre 2 , mais aussi par un polynôme d'ordre 3 …et d'une façon générale par un polynôme d'ordre n appelé développement

limité à l'ordre n :

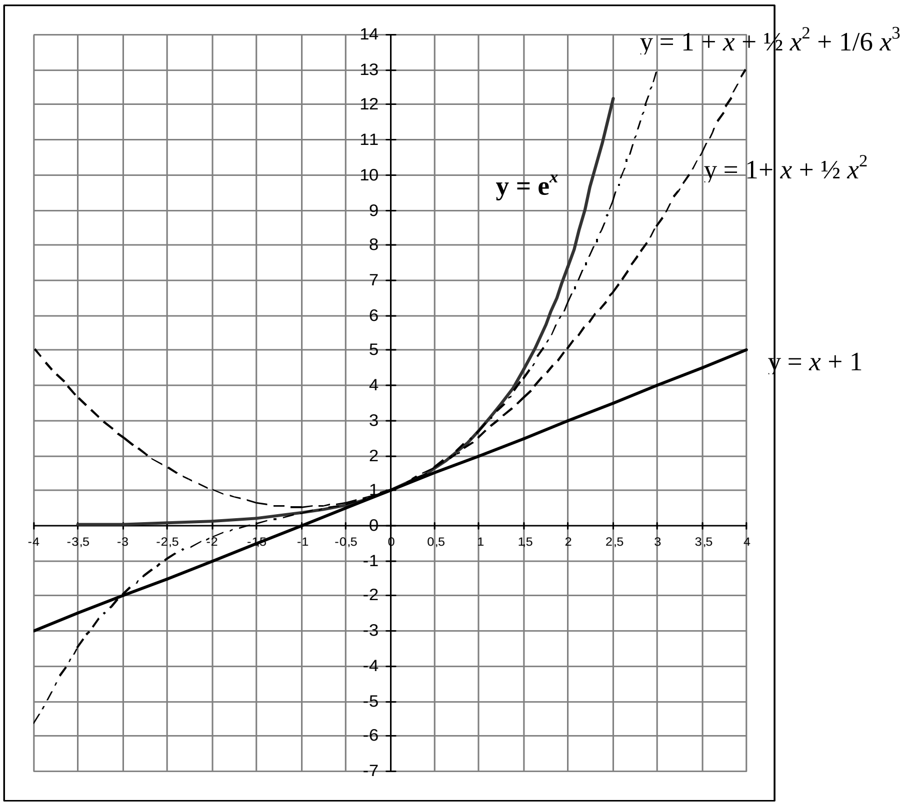
Développement limité à l'ordre 2 de la fonction exponentielle :

$$\boxed{e^{x} = 1 + x + \tfrac{1}{2} x^{2} + x^{2}\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0}$$

Développement limité à l'ordre 3 de la fonction exponentielle

$$\boxed{e^{x} = 1 + x + \tfrac{1}{2} x^{2} + \frac{1}{6} x^{3} + x^{3}\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0}$$

GRAPHIQUEMENT



2°) Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 et n un entier naturel non nul.

On dit que la fonction f admet un développement limité d'ordre n (dln) au voisinage de 0 s'il existe un polynôme P_n

de degré inférieur ou égal à n et une fonction ε tels que :

$$f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Le polynôme $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ est la PARTIE REGULIERE du dl
Le terme $x^n \varepsilon(x)$ est le TERME COMPLEMENTAIRE du dl

TABLEAU DES DEVELOPPEMENTS LIMITES USUELS

A l'ordre n	A l'ordre 2	A l'ordre 3
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x)$ $n! = 1.2.3. \ldots .(n-1)\,n$	$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2 \varepsilon(x)$	$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3 \varepsilon(x)$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots + (-1)^n x^n + x^n \varepsilon(x)$	$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2 \varepsilon(x)$	$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3 \varepsilon(x)$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x)$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3 \varepsilon(x)$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x)$	$\sin x = x + x^2 \varepsilon(x)$ sinus est impaire	$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^3 \varepsilon(x)$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p} \varepsilon(x)$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 \varepsilon(x)$ Cosinus est paire
$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\ldots)(\alpha-n+1)}{n!} x^n + x^n \varepsilon(x)$	$(1+x)^\alpha =$ $1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1) x^2 + x^2 \varepsilon(x)$	$(1+x)^\alpha =$ $1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + x^3 \varepsilon(x)$

Remarque : Si la fonction est paire la partie régulière ne comporte que des termes de degré pair
Si la fonction est impaire la partie régulière ne comporte que des termes de degré impair

3°) Opérations et dl

LA SOMME ET LE PRODUIT PAR UNE CONSTANTE REELLE

Si au voisinage de 0 $f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon_1(x)$ et $g(x) = Q_n(x) + x^n \varepsilon_2(x)$ alors

$(f+g)(x) = P_n(x) + Q_n(x) + x^n \varepsilon_3(x)$ et $k\,f(x) = k\,P_n(x) + x^n \varepsilon_4(x)$

Exemple : On veut le dl3 au voisinage de 0 de la fonction $h(x) = 4e^x - \dfrac{1}{1+x}$

$$4e^x = 4[1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)]$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon_2(x)$$

donc

$h(x) = 3 + 5x + x^2 + 5x^3/3 + x^3\varepsilon(x)$

où $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$

LE PRODUIT

Si au voisinage de 0 $f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = Q_n(x) + x^n\varepsilon_2(x)$ alors

$(f \times g)(x) = W_n(x) + x^n\varepsilon_3(x)$ où W_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à n qui se déduit du produit $P_n(x) \times Q_n(x)$

Exemple : On veut le dl3 au voisinage de 0 de la fonction $t(x) = \dfrac{e^x}{1+x} = e^x \times \dfrac{1}{1+x}$

$$e^x = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon_1(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon_2(x)$$

donc

$t(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - 1/3\,x^3 + x^3\varepsilon(x)$

$(1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + x^3/6 + x^3\varepsilon_1(x))\,(1 - x + x^2 - x^3 + x^3\varepsilon_2(x)) = 1 - x + x^2 - x^3 + x - x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + x^3/6 + \ldots$

On ne s'occupe que des termes de degré inférieur ou égal à 3.

LA COMPOSITION

Si au voisinage de 0 $f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x)$ c'est – à – dire $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + x^n\varepsilon_1(x)$

et $g(x) = Q_n(x) + x^n\varepsilon_2(x)$ **avec g (0) = 0** alors

$(f \circ g)(x) = R_n(x) + x^n\varepsilon_3(x)$ c'est – à – dire où $R_n(x)$ s'obtient à partir de $P_n[g(x)]$ càd

De $a_0 + a_1(Q_n(x) + x^n\varepsilon_2(x)) + a_2(Q_n(x) + x^n\varepsilon_2(x))^2 + \ldots$

Exemple : On veut le dl2 au voisinage de 0 de la fonction $S(x) = \dfrac{1}{1 + e^{x}}$

$$\left.\begin{array}{l} e^{x} = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + x^2 \varepsilon_1(x) \\ \\ \dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + x^2 \varepsilon_2(x) \end{array}\right\} \text{donc}$$

$$\boxed{S(x) = 1 + x + 3/2\, x^2 + x^2 \varepsilon(x)}$$

$$\boxed{1 - [1 + x + \tfrac{1}{2} x^2 + x^2 \varepsilon_1(x)] + [1 + x + \tfrac{1}{2} x^2 + x^2 \varepsilon_1(x)]^2 + x^2 \varepsilon_2(x) = -(x + \tfrac{1}{2} x^2) + (1 + x)^2 + 2.\, \tfrac{1}{2} x^2 .(1 + x) + \ldots}$$

INTEGRATION D'UN DLn

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant 0 et F une primitive de f sur I.

Si au voisinage de 0 $f(x) = P_n(x) + x^n \varepsilon_1(x)$ c'est – à – dire $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x)$

Alors le développement limité de F à l'ordre n+1 est

$F(x) = F(0) + a_0 x + a_1 x^2/2 + \ldots + a_n x^{n+1}/(n+1) + x^{n+1} \varepsilon(x)$

Exemple : On veut le dl3 au voisinage de 0 de la fonction $l(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$

$\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^3 \varepsilon_2(x)$ Or l admet la fonction Arctangente comme primitive donc le dl4 de la Fonction Arc tangente au voisinage de 0 est :

$\operatorname{Arctan} x = \operatorname{Arctan} 0 + x - x^3/3 + x^4 \varepsilon(x)$ soit $\operatorname{Arctan} x = x - x^3/3 + x^4 \varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$