EXERCICES CORRIGES SUR LES EQUATIONS EN LN

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. (E_1) $\ln(x-3) = 1$

2. (E_2) $\ln(x-2) + \ln(x-3) = \ln 6$

3. (E_3) $(\ln x)^2 - \ln x - 2 = 0$

4. (E_4) $\ln|2x-1| = \ln 3$

CORRIGES

1.

Corrigé

$\ln e = 1$.

(E_1) existe ssi $x - 3 > 0 \Leftrightarrow x > 3$. Donc le domaine d'existence de (E_1) est $D_1 =]3, +\infty[$

Si a et b strictement positifs $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$.

$\forall x \in D_1$, $(E_1) \Leftrightarrow \ln(x-3) = \ln e$
$\Leftrightarrow x - 3 = e$
$\Leftrightarrow x = 3 + e$

$3 + e \in D_1$ donc $3 + e$ est solution de (E_1)

Vérification : $\ln(3 + e - 3) = \ln e = 1$

$$S = \{3 + e\}$$

2.

Corrigé

Ne transformez pas l'équation avant d'avoir donné son domaine d'existence.

(E_2) existe ssi $\left\{\begin{array}{l} x-2>0 \Leftrightarrow x>2 \\ x-3>0 \Leftrightarrow x>3 \end{array}\right\} \Rightarrow x > 3.$

Donc le domaine d'existence de (E_2) est $D_2 =]3, +\infty[$

$\forall x \in D_2$, $(E_2) \Leftrightarrow \ln[(x-2)(x-3)] = \ln 6$
$\Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 6$
$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 6$
$\Leftrightarrow x^2 - 5x = 0$
$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 5$

Si a et b sont 2 réels strictement positifs $\ln a + \ln b = \ln(ab)$.

$0 \notin D_2$ donc 0 n'est pas solution de (E_2)

$5 \in D_2$ donc 5 est solution de (E_2)

Vérification : $\ln 3 + \ln 2 = \ln 6$

$$S = \{5\}$$

3.

Corrigé

Faites bien la différence entre $\ln(x^2) = 2\ln x$ pour $x > 0$ et $(\ln x)^2 = \ln x \times \ln x$
(E_3) ne peut pas être tranformée pour l'écrire sous la forme $\ln a = \ln b$.
Utilisez un changement de variable en posant $X = \ln x$.

(E_3) existe ssi $x > 0$ donc le domaine d'existence de (E_3) est $D_3 =]0, +\infty[$.

Posons $X = \ln x$.
On peut alors écrire (E_3) sous la forme
$X^2 - X - 2 = 0$
$\Leftrightarrow X = -1$ ou $X = 2$.
Or $X = \ln x$ donc

$$\begin{cases} \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{e} \text{ (car } \ln \dfrac{1}{e} = -1) \\ \text{ou} \\ \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2 \text{ (car } \ln e^2 = 2) \end{cases}$$

$\frac{1}{e} \in D_3$ donc $\frac{1}{e}$ est solution de (E_3).

$e^2 \in D_3$ donc e^2 est solution de (E_3).

Vérification pour $\frac{1}{e}$

$$\left(\ln \frac{1}{e}\right)^2 - \ln \frac{1}{e} - 2 = (-1)^2 - (-1) - 2$$
$$= 1 + 1 - 2 = 0$$

Vérification pour e^2

$(\ln e^2)^2 - \ln e^2 - 2 = (2)^2 - 2 - 2 = 4 - 2 - 2 = 0$

$$S_3 = \left\{\frac{1}{e}, e^2\right\}$$

4.

Corrigé

$|a| > 0$ pour $a \neq 0$.

(E_4) existe ssi $|2x - 1| > 0 \Leftrightarrow 2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$.

Donc le domaine d'existence de (E_4) est

$$D_4 = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

$\forall x \in D_4$, $(E_4) \Leftrightarrow |2x - 1| = 3$.
Il n'existe que deux réels dont la valeur absolue est 3, ce sont 3 et -3.

Donc $|2x - 1| = 3$ ssi $\begin{cases} 2x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 2 \\ \text{ou} \\ 2x - 1 = -3 \Leftrightarrow x = -1 \end{cases}$

$2 \in D_4$ donc 2 est solution de D_4.
$-1 \in D_4$ donc (-1) est solution de D_4.

Vérification pour 2
$\ln|3| = \ln 3$

Vérification pour (– 1)
$\ln|-3| = \ln 3$

$$S = \{2, -1\}$$