EXERCICE 3 **6 points**

1. **a.** On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$. Donc comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - 1 = -1$, on a finalement $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

   b. $x\left(1+\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right) = x\left(\dfrac{\mathrm{e}^x-1+1}{\mathrm{e}^x-1}\right) = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x-1} = f(x)$.

   On en déduit car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1} = 0$, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. On a $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} = 1$ (à la calculatrice) .

   On peut également rappeler que $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x}{x-0} = \left(\mathrm{e}^x\right)'_{x\to0} = e^0 = 1$.

   Le quotient inverse $\dfrac{x}{\mathrm{e}^x-1}$ a lui aussi la même limite en 0 ; donc la limite de f est celle de e^x soit 1.

   Conclusion : $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$ et $f(0) = 1$: la fonction f est continue en 0.

3. **a.** Soit k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = \mathrm{e}^x - x - 1$. Cette fonction est dérivable et $k'(x) = \mathrm{e}^x - 1$ qui s'annule pour $x = 0$.

   Cette fonction est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ de $+\infty$ à $k(0) = 0$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$ de 0 à $+\infty$.
   Donc $k(x) \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x - x - 1 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant x+1$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$

   b. Dérivée de f : $f'(x) = \dfrac{(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x-1) - x\mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^{2x} - x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2} = \dfrac{\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - x - 1)}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$.
   La fonction g est donc la fonction k qui ne s'annule que pour $x = 0$. Donc $f'(x)$ est composé de termes positifs pour $x \neq 0$
   Conclusion : pour $x \neq 0$, $f'(x) > 0$. La fonction est croissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$. D'où le

   c. Tableau de variations