DERIVATION

I) Dérivée d'une fonction

f désigne une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

1°) Formulaires des fonctions usuelles

Ce tableau doit être connu parfaitement.♥

f	Df	f'	D f'
a	R	0	R
x		1	
x^2		$2x$	
x^3		$3x^2$	
x^n n∈ N*		nx^{n-1}	
$\frac{1}{x}$	R*	$-\frac{1}{x^2}$	R*
$\frac{1}{x^2}$	R*	$-\frac{2}{x^3}$	R*
$\frac{1}{x^n}$ n∈ N*	R*	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	R*
$\sqrt{x}$	R^+	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	R^{+*}
$\cos x$	R	$-\sin x$	R
$\sin x$	R	$\cos x$	R
$\tan x$	R\{ (2k+1)π/2}	$1 + \tan^2 x$	R\{ (2k+1)π/2}
e^x	R	e^x	R
ln x	R*+	$\frac{1}{x}$	R*+

2°) Opérations sur les fonctions dérivables :rappel des formules usuelles complément sur la dérivation.
Dans ce paragraphe les fonctions u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

♥

OPERATIONS	EXEMPLES : Dans chaque cas calculer la dérivée de la fonction donnée sur I.
Somme $(U + V)' = U' + V'$	Soit f la fonction définie sur [1 ;18] par $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ $f'(x)= 3x^2 - \frac{1}{x^2}$
Produit par un réel $(aU)'= aU'$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = 5 x^6$ $f'(x)=30\ x^5$
Produit $(UV)'= U'V + UV'$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (x^6 + x) (2x^5 + 1)$ Méthode : $U(x) = x^6 + x$ $U'(x) = 6x^5 + 1$ $V(x) = 2x^5 + 1$ $U'(x) = 10x^4$ $f'(x)= (6x^5 + 1)(2x^5 + 1) + (x^6 + x)(10x^4)$ $f'(x)= 22 x^{10} +18 x^5 +1$
Carré $(U^2)' = 2U'.U$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (x^4 + x^3 - 5)^2$ $U(x) = x^4 + x^3 - 5$ $U'(x) = 4x^3 + 3 x^2$ $f'(x)= 2(4x^3 + 3 x^2)(x^4 + x^3 - 5)$ $f'(x)= 2 x^2 (4x + 3)(x^4 + x^3 - 5)$
Puissance entière $(U^n)' = n U'.U^{n-1}$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (x^2 + 3x + 4)^3$ $U(x) = x^2 + 3x + 4$ $U'(x) = 2x + 3$ $f'(x)= 3 (2x + 3)(x^2 + 3x + 4)$

Inverse ($U \neq 0$ sur I) $\left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{U'}{U^2}$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ $U(x) = x^2 + 1$ $U'(x) = 2x$ $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$
Quotient($V \neq 0$ sur I) $\left(\frac{U}{V}\right)' = -\frac{U'V - UV'}{V^2}$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \frac{3x+1}{x^2+2}$ Méthode : $U(x) = 3x + 1$ $U'(x) = 3$ $V(x) = x^2 + 2$ $V'(x) = 2x$ $f'(x) = \frac{(3x^2+6) - (3x+1)(2x)}{(x^2+2)^2}$ $f'(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 6}{(x^2+2)^2}$
Racine carrée($U>0$ sur I) $\left(\sqrt{U}\right)' = \frac{U'}{2\sqrt{U}}$	Soit f la fonction définie sur [3 ; 10] par $f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2}$ $U(x) = x^2 - x - 2$ $U'(x) = 2x - 1$ $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{(x^2 - x - 2)}}$
COMPOSEE **(Cos(ax +b))' = -asin(ax+b)** **(Sin(ax+b))' = acos(ax +b)**	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \cos(3x + 4)$ $f'(x) = -3\sin(3x + 4)$

3°) Dérivées successives

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Sa fonction dérivée f ' est appelée fonction dérivée première ou d'ordre 1 de f Lorsque f ' est dérivable sur I, sa fonction dérivée est notée f '' et est appelée dérivée seconde de f. Par itération, pour tout entier naturel n ≥ 2, on définit la dérivée n ième de f comme étant la dérivée de la fonction dérivée d'ordre n – 1: $\mathbf{f^{(n)} = (f^{(n-1)})'}$.

Exemple : $f(x)= \sin 2x$ avec $x \in$ R. Calculer la dérivée seconde de f.Que remarquez – vous ?

$f'(x) = 2\cos 2x$ et $f''(x) = -4\sin 2x = -4f(x)$ c'est ce que l'on appelle une équation différentielle d'ordre 2.

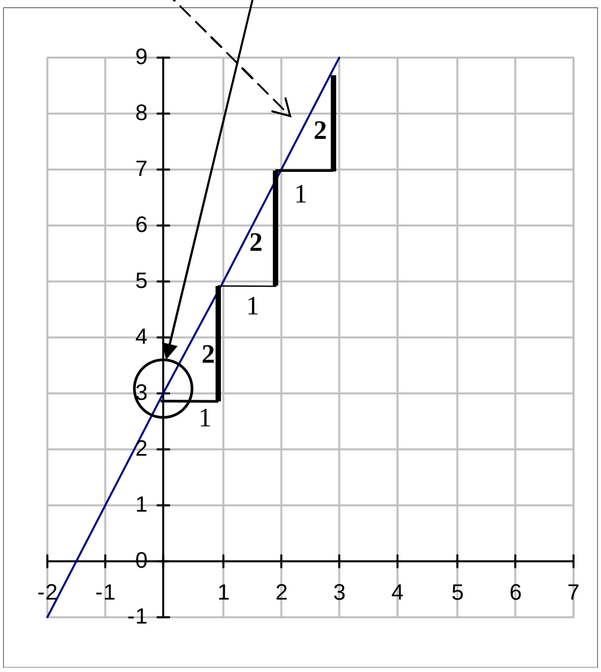
$Y'' + 4Y = 0$

II)Interprétation graphique du nombre dérivé : tangente à une courbe .

1°) Equation de droite et coefficient directeur d'une droite

a) Droite sécante à l'axe des ordonnées

Exemple : Soit D la droite d'équation $y = \mathbf{2}\ x + \mathbf{3}$.



2 est le **coefficient directeur** de la droite D.
(On dit aussi la pente de la droite D)
On peut le lire graphiquement .

3 est l'ordonnée du point d'intersection de D avec l'axe (Oy).

Attention à l'unité

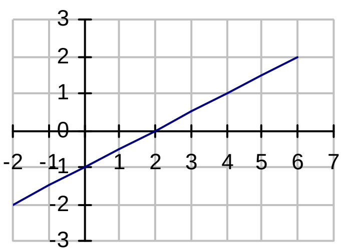
Cas général : Une droite sécante à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $\mathbf{y = m\ x + p}$ où

m est le coefficient directeur de la droite et où

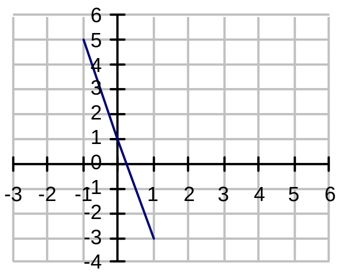
p est l'ordonnée à du point d'intersection de D avec l'axe (Oy).

Remarque :

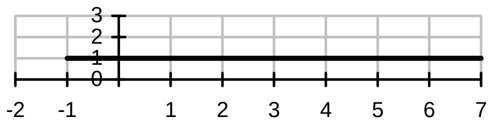
Lorsque m est POSITIF la droite « monte vers les y positifs »



Lorsque m est NEGATIF la droite « descend vers les y négatifs »



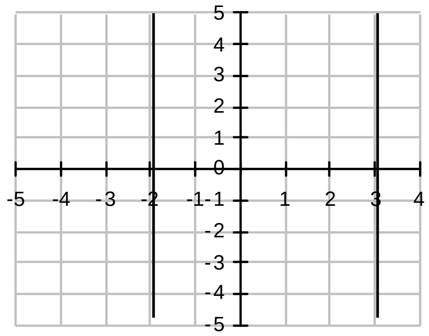
Si m est NUL la droite est PARALLELE A L'AXE DES ABSCISSES ou HORIZONTALE.



b) Droite parallèle à l'axe des ordonnées

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées (ou verticale) a une équation de la forme x = c .

Exemples : $x = -2$



$x = 3$

Remarque : ATTENTION elle n'a pas de coefficient directeur !

2°) Tangente à une courbe et nombre dérivé

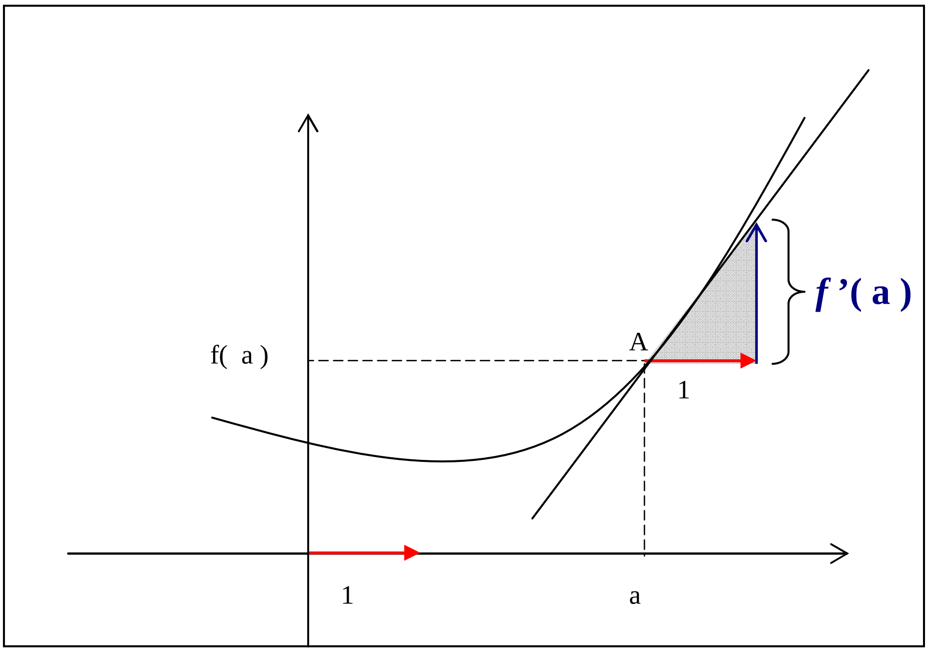
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un élément de I.C est la courbe de f dans un repère (O ; i , j) .Si f' est la fonction dérivée de f sur I alors

le nombre dérivé de f en a est $f'(a)$ et

Le coefficient directeur de la tangente à C

au point d'abscisse a est aussi

$\boxed{f'(a)}$



Conséquence

Une équation de la tangente à C en au point A d'abscisse a c'est - à - dire au point de coordonnées (a ; f (a))

est

$$\boxed{y = \boldsymbol{f'(a)} \,.\, (x - a) + f(a)}$$

Exercices

Exemple

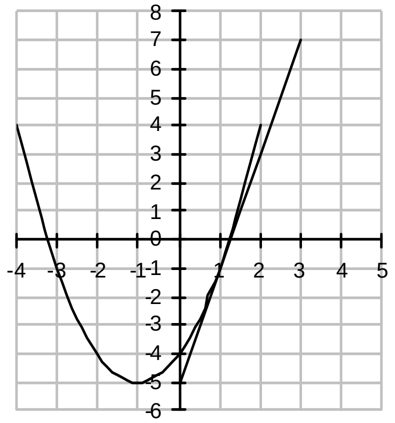
1°) Représenter graphiquement la fonction f définie sur [-4 ; 2] par $f(x) = x^2 + 2x - 4$ .On note C la courbe obtenue .

2°) Calculer la dérivée f' de f.

3°) Montrer qu'une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1 est $y = 4x - 5$.

4°) Tracer T .

1°)



2°) $f'(x) = 2x + 2$

3°) Equation de la tangente T au point d'abscisse 1 :

$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

soit $y = 4(x - 1) - 1$

Soit encore $y = 4x - 5$

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur [-2 ; 4] par

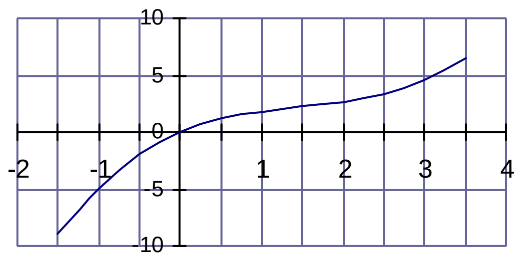
$f(x) = x^3/3 - 1.5.x^2 + 3x$. On note C sa courbe ci-contre .

1°) Calculer la dérivée f' de f.

2°) Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.

3°) Tracer T .

4°) Déterminer une équation de la tangente à C aux points de la courbe où elle est parallèle à la droite d'équation $y = x + 1$.



Corrigé : 1°) $f'(x) = x^2 - 3x + 3$ 2°) $y = f'(0)\,x + f(0)$ soit $y = 3x$

4°) On cherche les points dont l'abscisse vérifie l'équation $f'(x) = 1$ c'est – à – dire $x^2 - 3x + 2 = 0$

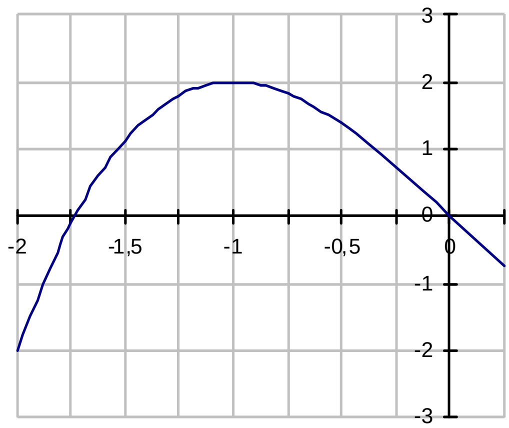
1 est solution évidente l'autre solution est 2 ; les points cherchés sont les points A(1, 11/6) et B(2 ; 8/3)

Equation réduite de la tangente T_A : $y = x + 5/6$ de la tangente T_B : $y = x + 2/3$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur [-2 ; ¼] par $f(x) = x^3 - 3x$ dont la courbe C est donnée ci-contre.

1°) Tracer la tangente à C au point d'abscisse -1.
2°) Donner une équation de la tangente à C au point O.



Corrigé : 1°) f'(- 1) = 0 la tangente est donc HORIZONTALE au point d'abscisse -1 .
2°) y = -3x   On doit donc étudier le signe de f(x) - (- 3x) = x^3 On en déduit que C est au dessus de T si x>0 et en dessous si x< 0.

Remarques :

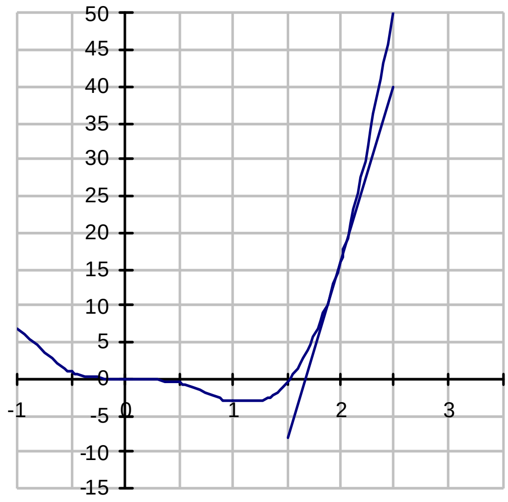
Une équation de la tangente au point **d'abscisse 0**, s'écrit **y = *f* '(0) *x* + *f*(0)**

La tangente à la courbe en un point d'abscisse a est horizontale ssi ***f* '(a) = 0**

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur [-2 ;2] dont la courbe C est donnée ci-contre.

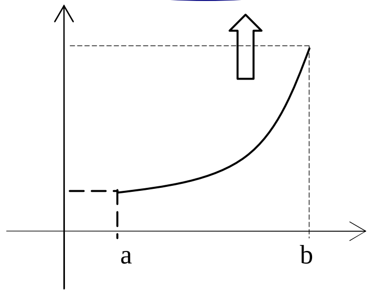
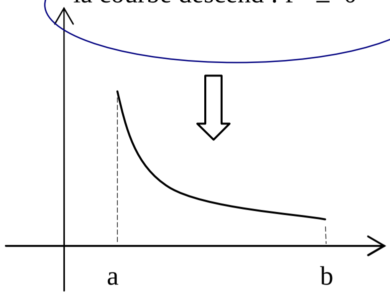
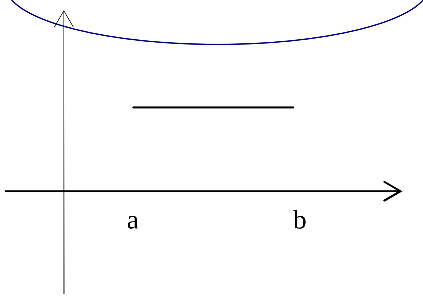
1°) Déterminer le nombre dérivé de f en 2.
2°) Donner une équation de la tangente à C au point d'abscisse .



Corrigé : 1°) f ' (2) = + 25/+0.5 = 50
Car f '(2) est le COEFFICIENT DIRECTEUR DE LA TANGENTE AU POINT D'ABSCISSE 2.
2°) y = 50 x - 8 5

III) Signe de la dérivée et sens de variation.

1°) Théorème fondamental f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

VARIATIONS	COURBE	TABLEAU
Si f ’$\geq$ 0 sur I Alors f est **croissante** sur I.	la courbe monte : f ’ $\geq$ 0  	x : a … b f ’(x) : + f(x) : f(a) ↗ f(b)
Si f ’ $\leq$ 0 sur I alors f est **décroissante** sur I.	la courbe descend : f ’ $\leq$ 0  	x : a … b f ’(x) : - f(x) : f(a) ↘ f(b)
Si f ‘ = 0 sur I alors f est constante sur I.	La courbe est horizontale :f ’=0  	x : a … b f(x) : f(a) → f(b)

2°) Application à l’étude des variations d’une fonction

On veut étudier les variations de la fonction f définie sur [-10 ; 10] par f(x)= $x^3 - x^2 - x + 3$

Pour cela on calcule la dérivée f ’de f et on étudie le signe de f ’ sur R : f ’(x)= $3x^2 - 2x - 1$ .D’après la règle sur le signe du trinôme on a donc le signe de f ’(x) et le tableau de variation de f :

x	-10		- 1/3		1		10
f’(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	-1087	↗	**86/27**	↘	2	↗	893

Remarque : dans le tableau de variation on ne met (sauf précisions contraires du texte) que des **valeurs EXACTES** !

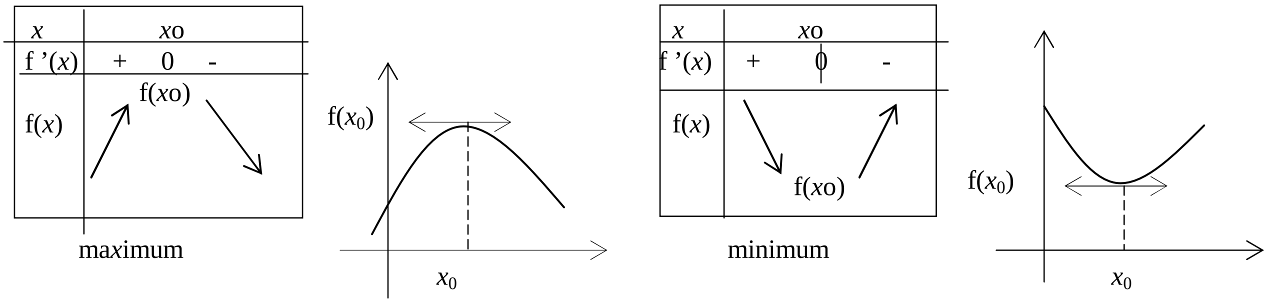
IV) Dérivation et applications

1°) Extrémum local

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert] a , b[et $xo \in$]a , b[.

Si f '(x) s'annule en xo <u>en changeant de signe</u> alors f admet en xo un extrémum local .



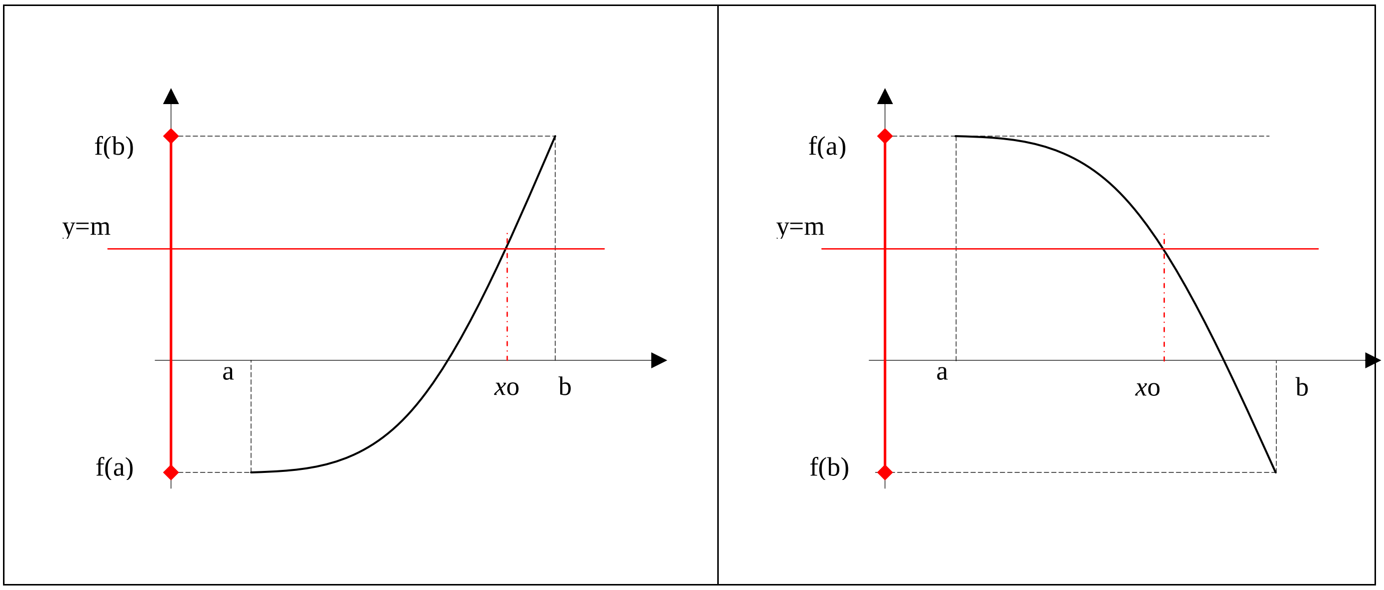
<u>Remarque</u> : en un extremum local la tangente est **<u>horizontale</u>**.

<u>Contre - exemple</u> : **<u>Attention</u>** si f '(x) s'annule sans changer de signe alors il n'y a pas d'extremum .
Considérons la fonction f (x)= x^3 sur [-2, 2] ; on a bien f '(0)=0 cependant comme f '(x)=3x^2 ne change pas de signe sur [-2 ;2](f'(x)≥ 0) il n'y a pas d'extremum en 0 .

2°) Résolution d'équations du type f(x)= m .

<u>Théorème</u> Soit f une fonction dérivable sur un intervalle [a ;b]

1.Si f ' > 0 sur]a ;b[alors pour tout réel m compris entre f(a) et f (b) l'équation f(x)=m admet une unique solution xo dans [a ;b] .
2. Si f ' < 0 sur]a ;b[alors pour tout réel m compris entre f(a) et f (b) l'équation f(x)=m admet une unique solution xo dans [a ;b] .



Exemple :

Soit f la fonction définie sur I=[0 ;2] par f(x) =x^3 - 3x^2 + 2 .Montrer que l'équation f(x)= 1 admet une unique solution dans I.

f '(x)= $3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

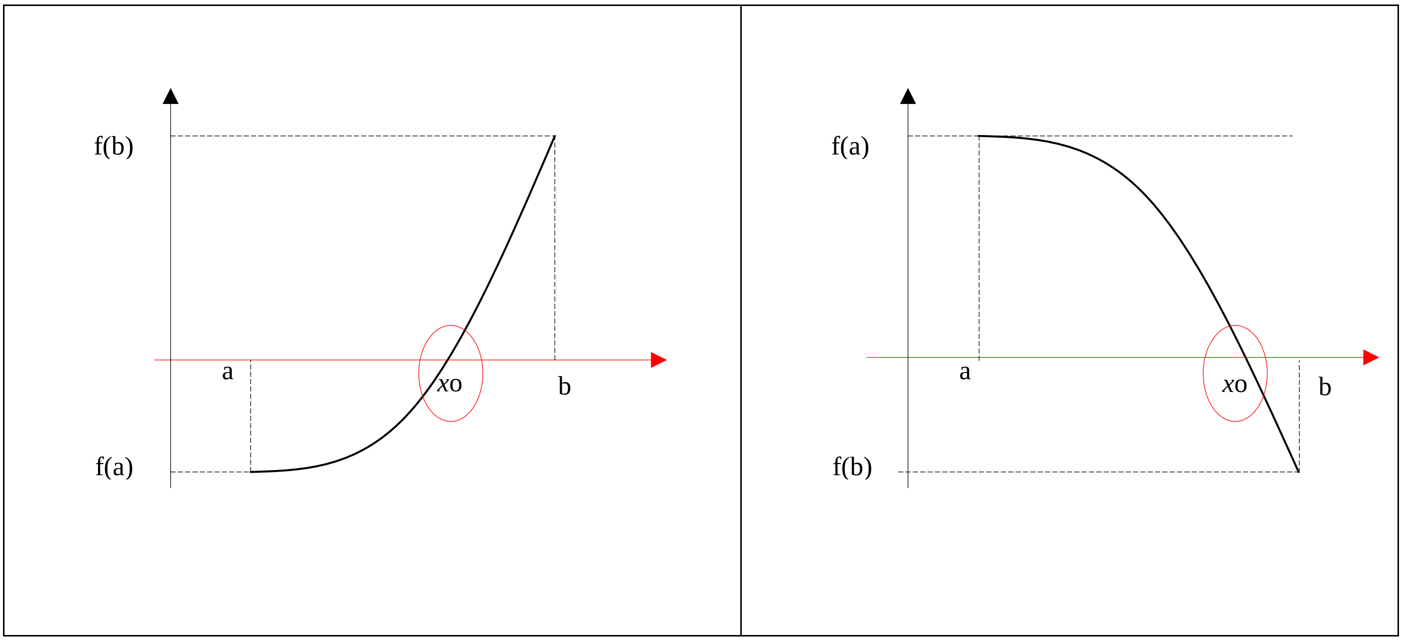
x	0		2
f'(x)	0	-	0
f(x)	2	↘	-2

f est dérivable sur I et strictement décroissante sur I avec f(0) = 2 et f(2) = -2 c'est – à – dire 1 compris entre f(0) et f(2) alors l'équation f(x)= 1 admet une unique solution dans I d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Conséquence

Soit f une fonction dérivable sur [a ;b]. Si f ' > 0 (ou f '< 0) sur]a ;b[et si f(a)×f(b) < 0 alors l'équation f(x)=0 admet une unique solution xo dans [a ;b] .

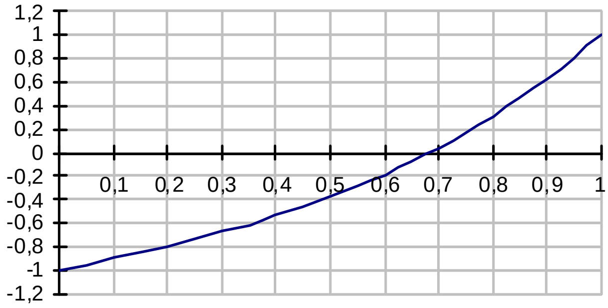
Remarque : Dire que f(a)×f(b) < 0 signifie que les nombres f(a) et f(b) sont de signes contraires



Exemple

Soit f la fonction polynôme définie sur I=[0 ;1] par f(x)= $x^3 + x - 1$. Ce polynôme n'admet pas de racines évidentes dans I , on va donc essayer de trouver la solution de f(x)= 0 à l'aide d'une autre méthode.

Sur la courbe ci-contre on voit que l'équation f(x)=0 admet bien une solution dans I. Grâce au théorème suivant nous allons le démontrer **Résolution du problème .**



Dans un premier temps on va donc démontrer l'existence de la solution. Pour cela on étudie les variations de f sur [0 ;1].

f '(x)= $3x^2 + 1$ donc f'(x) > 0 sur I .

Le tableau de variation est donc :

x	0	1
f '(x)	+	
f(x)	-1 ↗	1

f est dérivable sur I et strictement croissante sur I avec f(0) = -1 et f(1) = 1 c'est – à – dire 0 compris entre f(0) et f(1) alors l'équation f(x)= 0 admet une unique solution dans I d'après le théorème des valeurs intermédiaires.

Maintenant que l'on a démontré l'existence et l'unicité de la solution de l'équation f(x)= 0 on va donné à l'aide de la calculatrice un encadrement de cette solution à 10^{-2} près. En effet on a :

$$0 < xo < 1$$

On va diviser l'intervalle I en 10 intervalles de longueur 0.1 , on dit que l'on effectue un balayage avec un pas de 0.1. On obtiendra alors une valeur approchée de xo à 10^{-1} près :

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
f(x)	**-1**	**-0.89**	**-0.79**	**-0.67**	**-0.53**	**-0.37**	**-0.18** -	**0.04** +	**0.31**	**0.62**	**1**

On fait le même travail dans un autre tableau pour trouver l'encadrement de x_0 à 10^{-2} près.

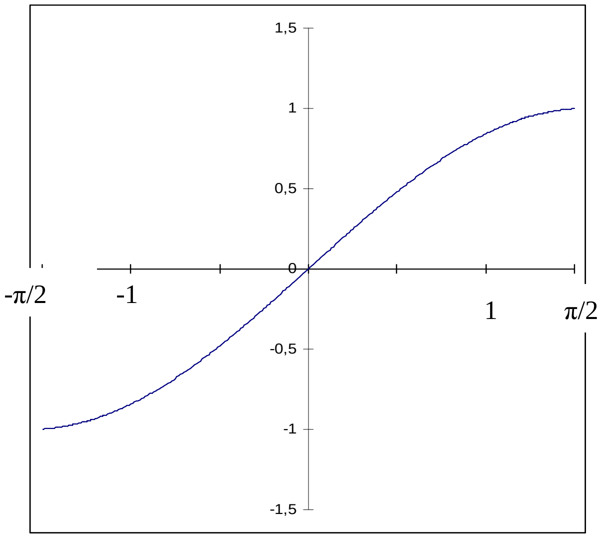
x	**0,6**	**0.61**	**0.62**	**0.63**	**0.64**	**0.65**	**0.66**	**0.67**	**0.68**	**0.69**	**0.7**
f(x)	**-0.18**	**-0.16**	**-0.14**	**-0.11**	**-0.09**	**-0.07**	**-0.05**	**-0.02**	**-0.005** -	**0.01** +	**0.04**

Conclusion : $0{,}68 < x_0 < 0{,}69$

puisque f(0.68)≈-0.006 et que f(0.69))≈0.02 c'est - à - dire f(0.68)×f(0.69) < 0 , que **0.68 < *xo* < 0.69 .**

qui est l'encadrement à 10^{-2} de xo .

3°) COMPLEMENTS : ETUDE DES FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES
FONCTION COSINUS



La fonction sinus est une bijection croissante de [-π/2 ;π/2] dans [-1 ;1].

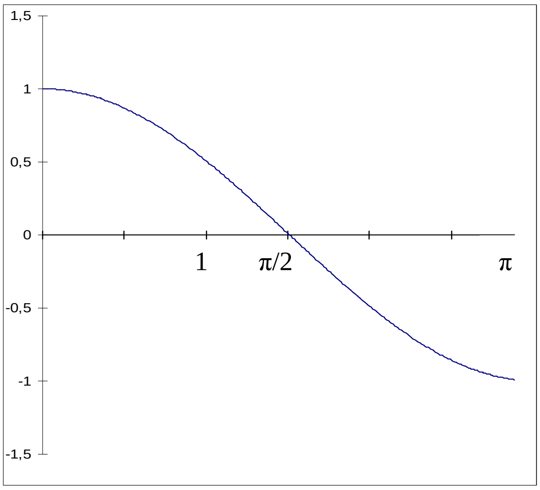
Rappels :

$\sin(x + 2\pi) = \sin x$

$\sin(-x) = - \sin x$

$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$

FONCTION COSINUS



La fonction sinus est une bijection croissante de [0 ;π] dans [-1 ;1].

Rappels :

$\cos (x + 2\pi) = \cos x$

$\cos (-x) = \cos x$

$\boxed{(\cos x)' = - \sin x}$

Rappel : Tableau de valeurs avec les angles remarquables

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π
$\sin x$	0	½	√2	√3/2	1	0
$\cos x$	1	√3/2	√2	½	0	-1
$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	0	√3/3	1	√3	X	0

V) PRIMITIVES

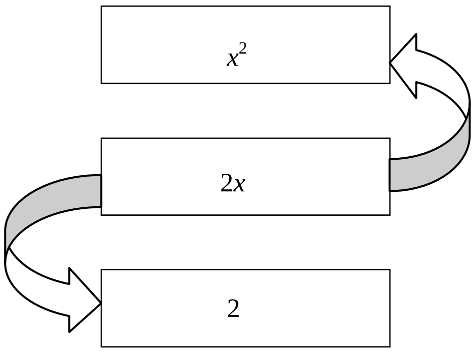
1°) Etude d'un exemple simple

On sait très facilement calculer la dérivée de la fonction $f(x) = 2x$; c'est $f'(x) = 2$.
On veut savoir maintenant ce que l'on va obtenir si on fait le chemin « à l'envers ».En effet je voudrais trouver une fonction F dont la dérivée est f c'est-à-dire que je cherche F telle que $F'(x) = 2x$.

Ici il est facile de voir que la fonction $F(x) = x^2$ est une solution à notre problème.

On dit que F est une **primitive** de f. On peut symboliser la démarche à l'aide du schéma ci-dessous :

Je cherche une primitive
(Je remonte à la source)



Je dérive
(je « descend »)

Exercice

Etant donnée une fonction f déterminer une primitive de f c'est- à - dire une fonction F telle que $F'(x) = f(x)$:

a) $f(x) = 2$ b) $g(x) = 3x^2$ c) $h(x) = 4x^3$.
a) $F(x) = 2x$ b) $G(x) = x^3$ c) $H(x) = x^4$

2°) Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur I. Une fonction F définie sur I est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I

et que

$$\boxed{F' = f}$$

Exemples :

- $f(x) = 1$ une primitive de f est alors $F(x) = x$. Vérification : $F'(x) = 1$
- $f(x) = x$ une primitive de f est alors $F(x) = \frac{1}{2}x^2$. Vérification : $F'(x) = 2(\frac{1}{2}x) = x$
- $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ pour x dans $I =]0 ; +\infty[$ une primitive de f sur I est alors $F(x) = \dfrac{-1}{x}$. Vérification $F'(x) = \dfrac{1}{x^2}$

3°) Ensemble des primitives d'une fonction

Observation : si $G(x) = C$ où C est une constante réelle ,quelle est sa dérivée $g(x)$?

Donc toute constante réelle C est UNE PRIMITIVE de la fonction nulle.

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 1

> Soit f une fonction définie et dérivable sur I et F **une** primitive de f sur I. Les primitives de f sur I sont alors toutes les fonctions définies sur I par $x \rightarrow F(x) + C$ où C est une constante réelle .

Exemples : a)Donner les primitives de la fonction $f(x)= 3x^2$; ce sont les fonctions $F : x \rightarrow x^3 + C$ où $C \in R$.

b) Donner l'ensemble des primitives de la fonction $f(x)= 4x^3$; c'est l'ensemble des fonctions $F : x \rightarrow x^4 + C$ où $C \in R$.

Théorème 2

> Soit f une fonction définie et dérivable sur I.
> Parmi les primitives de f définies sur I il en existe **une et une seule** telle que $F(x_0) = y_0$.
> En particulier la fonction $x \rightarrow F(x) – F (a)$ est la seule primitive de f qui s'annule en a.

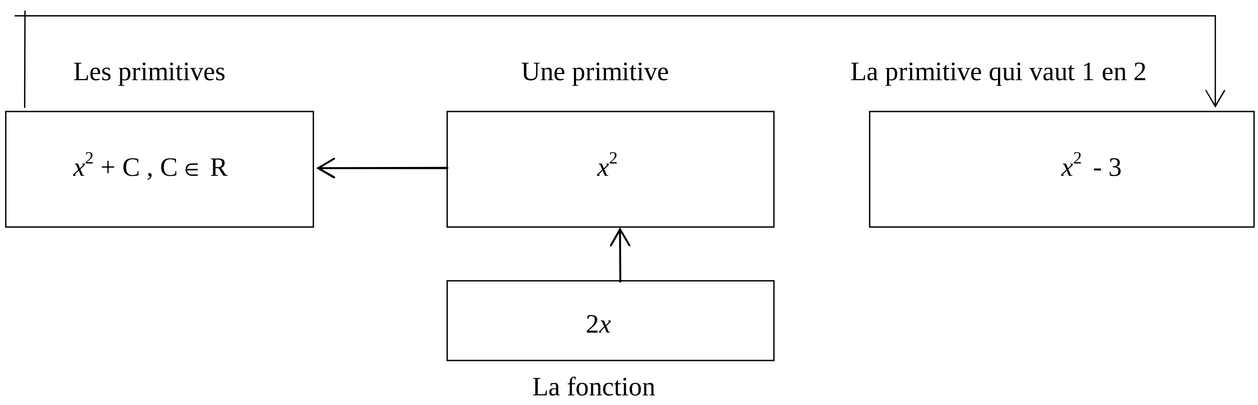
Exemple : Déterminer la primitive F_0 de la fonction f définie sur R par $f(x)= 3x^2$ telle que $F_0 (1) = 0$.

On sait que F_0 s'écrit $F_0 (x) = x^3 + C$. On va donc déterminer C pour que $F_0 (1) = 0$

On remplace donc x par 1 et on obtient $F_0 (1) = (1)^3 + C = 0$ soit $1 + C = 0$. Ce qui donne $C = - 1$.

La primitive cherchée est donc $F_0 (x) = x^3 - 1$.

Remarque : On fera donc bien la différence entre
une primitive de f (on donne généralement la fonction la plus simple qui répond à la question)
Les primitives de f (c'est la fonction trouvée ci-dessus + C où $C \in R$)
La primitive de f vérifiant une condition (On cherche la constante réelle C pour laquelle la condition est vérifiée)



Exercice
Soit f la fonction définie sur R par f(x) = x^2 , déterminer :
a) Une primitive de f sur R .
b) Les primitives de f sur R.
c) La primitive de f qui vaut 0 en -1 .

a) F(x) = $x^3/3$ b) ce sont les fonctions F : $x \to x^3/3 + C$ où $C \in R$ c) c'est la fonction $F_0(x) = x^3/3 + 1/3$.

4°) Savoir montrer qu'une fonction donnée F est une primitive sur I d'une fonction f

Soit f une fonction définie et dérivable sur I .
Pour démontrer qu'une fonction F donnée est une primitive de f il suffit de vérifier que F'(x) = f (x) pour tout x de I.

Exemple : Soit f (x) = $x^3 + 3x^2 - 2$.Montrer que la fonction F définie par F (x) = $\frac{1}{4}x^4 + x^3 - 2x + 3$ est une primitive de f sur R.
F'(x) = $4(\frac{1}{4}x^3) + 3x^2 - 2$ = f (x) donc F est une primitive de f sur R.

Exercice : Montrer que la fonction donnée F est une primitive de f sur I

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \qquad F(x) = -\frac{1}{x-2} \qquad I = [\,3\,;\,100\,]$$

5°) Primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées

a) Tableau

f	Df	F	DF
0	R	C	R
a		$ax + C$	
x		$\frac{1}{2}x^2 + C$	
x^2		$\frac{x^3}{3} + C$	
x^n		$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $n \in \mathbb{N}^*$	
$\frac{1}{x^2}$	R*	$-\frac{1}{x} + C$	R*
$\frac{1}{x^3}$	R*	$-\frac{1}{2x^2}$	R*
$\frac{1}{x^n}$	R*	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}$ n entier naturel $n \geq 2$	R*
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	R^+	$\sqrt{x} + C$	R^{+*}
$\frac{1}{x}$	$]0 ;+\infty[$	$\ln x + C$	$]0 ;+\infty[$
e^x	R	$e^x + C$	R
$\cos x$		$\sin x$	
$-\sin x$		$\cos x$	
$1 + \tan^2 x$		$\tan x$	

b) Opérations

En s'appuyant sur les résultats concernant les opérations sur les fonctions dérivables, on établit que :

Si F est une primitive de f sur un intervalle I et G est une primitive de g sur un intervalle I alors :

- F + G est une primitive de f + g
- aF est une primitive de af où a est une constante réelle.

Exemples :

a) Une primitive de $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ sur I = [1 ;10] est $F(x) = \frac{1}{4}x^4 + \ln x$

b) Une primitive de $f(x) = 5x^3$ sur R est $F(x) = 5(\frac{1}{4}x^4) = \frac{5}{4}x^4$.

c)Conséquences des formules de dérivation

Fonction	Primitive	EXEMPLES : Dans chaque cas calculer les primitives de la fonction donnée sur I.
$U'.U$	$\frac{1}{2}U^2$	Soit *f* la fonction définie sur R par $f(x) = 6x^2(2x^3+1)$ $F(x) = \frac{1}{2}(2x^5+1)^2 + C$, C dans R
$U'.U^n$, $n \in N^*$	$\frac{U^{n+1}}{n+1}$	Soit *f* la fonction définie sur R par $f(x) = (2x+1)(x^2+x)^2$ $F(x) = \frac{1}{3}(x^2+x)^3 + C$, C dans R
$\frac{U'}{U^2}$ ($U \neq 0$ sur I)	$-\frac{1}{U}$ ($U \neq 0$ sur I)	Soit *f* la fonction définie sur R par $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ $F(x) = -\frac{1}{x^2+1} + C$, C dans R
$\frac{U'}{U^n}$ ($U \neq 0$ sur I) n entier et $n \geq 2$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{U^{n-1}}$ ($U \neq 0$ sur I) n entier et $n \geq 2$	Soit *f* la fonction définie sur R par $f(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x+3)^3}$ $F(x) = -\frac{1}{2(x^2+3x+3)^2} + C$, C dans R
$\frac{U'}{\sqrt{U}}$ ($U > 0$ sur I)	$2\sqrt{U}$	Soit *f* la fonction définie sur R^+ par $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{(x^3+1)}}$ $F(x) = 2\sqrt{(x^3+1)} + C$, C dans R

Exemple : Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x(x^2+1)$. Donner la primitive de f qui s'annule en 1.

Méthode : d'abord on essaie d'identifier la formule que l'on va utiliser , ici U'U .
Cependant si $U(x) = x^2 + 1$ alors $U'(x) = 2x$ et non x . On va donc **« faire apparaître » U'(*x*)** .

$f(x) = \frac{1}{2}[\,2x(x^2+1)]$ d'où $F(x) = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}(x^2+1)^2] + C = \frac{1}{4}(x^2+1)^2 + C$ où C dans R. Comme $F(1) = 0$ on a $C = -1$ et $F(x) = \frac{1}{4}(x^2+1)^2 - 1$.