CORRECTION DES EXERCICES SUR LES SUITES

ETUDE DE CONVERGENCE

84 Une coquille s'est glissée dans le manuel, la suite à étudier est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n par $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$ et non par $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}$.

1. Initialisation : Au rang $n = 0$, $u_0 = 1 > 0$: la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : Supposons que, pour n fixé, on ait $u_n > 0$ et démontrons que $u_{n+1} > 0$.

Comme $\left.\begin{array}{r}\sqrt{u_n^2+1} > 0 \\ u_n > 0\end{array}\right\}$, alors $\dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} > 0$.

D'où $u_{n+1} > 0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2. $$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} - u_n = u_n\left(\frac{1}{\sqrt{u_n^2+1}} - 1\right) = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}}\left(1 - \sqrt{u_n^2+1}\right)$$

$$= \frac{u_n(1 - u_n^2 - 1)}{\sqrt{u_n^2+1}\,(1 + \sqrt{u_n^2+1})} = \frac{-u_n^3}{\sqrt{u_n^2+1}\,(1 + \sqrt{u_n^2+1})} < 0.$$

Donc (u_n) est décroissante.

3. (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc (u_n) converge.

4. $u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $u_2 = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\dfrac{1}{2}+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $u_3 = \dfrac{1}{\sqrt{4}}$, $u_4 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $u_5 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$.

Il semble que $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

5. Initialisation : Au rang $n = 0$: $u_0 = 1 = \dfrac{1}{\sqrt{0+1}}$.

Hérédité : Supposons que, pour n fixé, on ait $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ et démontrons

que $u_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+2}}$.

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\dfrac{1}{n+1}+1}} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\dfrac{n+2}{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}} .$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

6. $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n \to +\infty} n+1 = +\infty \\ \lim\limits_{y \to +\infty} \sqrt{y} = +\infty \end{array}\right\}$ par composée $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$.

Par inverse : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

85 1. $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall p \in [1, n] \quad n^2 + p \geqslant n^2 > 0$, donc :

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+p}} \leqslant \frac{1}{n}.$$

2. On sait que $\forall p \in [1, n] \quad \dfrac{1}{\sqrt{n^2+p}} \leqslant \dfrac{1}{n}$, donc : $U_n \leqslant n \times \dfrac{1}{n} U_n \leqslant 1$

(U_n) est majorée par 1.

3. (U_n) est croissante et majorée donc (U_n) converge.

86 1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}} \geqslant 0$. (u_n) est croissante.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2 = \dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \dfrac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})} = \frac{1}{n\sqrt{n-1} + (n-1)\sqrt{n}}.$$

Or $n\sqrt{n-1} \leqslant n\sqrt{n}$ et $(n-1)\sqrt{n} \leqslant n\sqrt{n}$. Donc :

$n\sqrt{n-1} + (n-1)\sqrt{n} \leqslant 2n\sqrt{n}$, soit $\dfrac{1}{\sqrt{n-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \dfrac{1}{2n\sqrt{n}}$.

3.

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{1}{4\sqrt{2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1}} - \cancel{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} \\[2ex]
\dfrac{1}{6\sqrt{3}} \leq \cancel{\dfrac{1}{\sqrt{2}}} - \cancel{\dfrac{1}{\sqrt{3}}} \\[2ex]
\quad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\[2ex]
\dfrac{1}{2(n-1)\sqrt{(n-1)}} \leq \cancel{\dfrac{1}{\sqrt{n-2}}} - \cancel{\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}} \\[2ex]
\dfrac{1}{2n\sqrt{n}} \leq \cancel{\dfrac{1}{\sqrt{n-1}}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}
\end{array}\right\} \text{on effectue la somme}$$

D'où $\displaystyle\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{2p\sqrt{p}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p\sqrt{p}} \leq 2 - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

soit

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p\sqrt{p}} \leq 3 - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Soit encore

$U_n \leq 3$ c'est – à – dire (U_n) majorée par 3.

4. (U_n) croissante et majorée converge .

89 **1.** $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{(2n+1)n + (2n+2)n - (2n+1)(2n+2)}{2(n+1)n(2n+1)}$$

$$= \frac{-3n-2}{2(n+1)n(2n+1)} < 0$$. Donc (u_n) est décroissante.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $0 \leqslant p \leqslant n$, $\frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{n+p} \leqslant \frac{1}{n}$.

Donc $\frac{n+1}{2n} \leqslant u_n \leqslant \frac{n+1}{n}$, d'où $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

(u_n) est minorée par 0 et décroissante, donc (u_n) converge.

90 **1.** Soit f la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\sin x - x$.
f est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $f'(x)=\cos x - 1 \leqslant 0$. Donc f est décroissante sur $[0\,;+\infty[$, ainsi pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $f(x) \leqslant f(0)$, soit $\sin x - x \leqslant 0$.

2. Par récurrence, au rang 0 : $u_0 = \frac{\pi}{3} \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

On suppose que pour $n \in \mathbb{N}$ fixe, $u_n \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

Donc $\sin(u_n) \leqslant u_n \leqslant \frac{\pi}{2}$ et $u_n \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ entraînent $\sin u_n \geqslant 0$.

Ainsi $0 \leqslant \sin u_n \leqslant \frac{\pi}{2}$, soit $u_{n+1} \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \sin u_n - u_n \leqslant 0$ d'après **1.**, car $u_n \geqslant 0$ d'après **2.** (u_n) est décroissante.

4. (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc (u_n) converge.

5. D'après **1.**, le tableau de variations de f est le suivant :

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	0 $\searrow$	$1-\frac{\pi}{2}$

D'après le tableau de variations, f est strictement décroissante de $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ à valeurs dans $\left[1-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$.

Donc $f(x)=0$ admet une unique solution sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ qui est 0.

6. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin u_n$. Si n est continue sur $\mathbb{R}$ et (u_n) converge vers ℓ, donc ℓ vérifie $\ell = \sin \ell$, soit $f(\ell)=0$, donc $\ell = 0$ d'après **5.**

91 **1.** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$. Donc (u_n) est croissante.

2. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + x$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
f est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme :

- soit (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$;
- soit $\ell = \ell^2 + \ell$, donc $\ell = 0$.

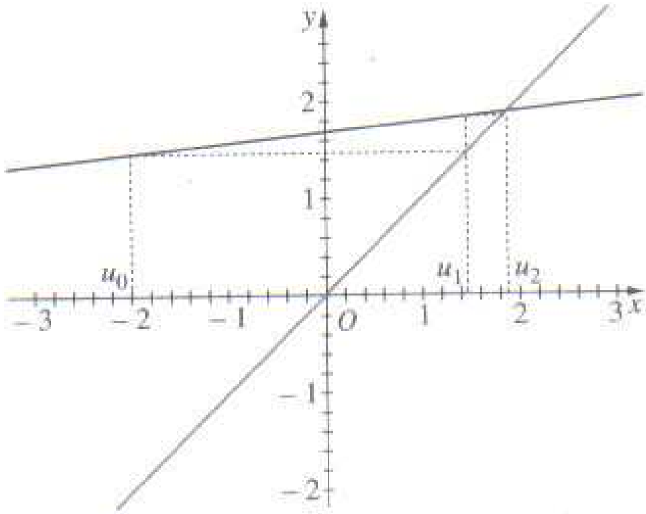
3. Comme (u_n) est croissante alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1 \Rightarrow u_n \geqslant u_1$ soit $u_n \geqslant u_0^2 + u_0$. Or, si (u_n) converge vers ℓ alors $\ell \geqslant u_0^2 + u_0 > 0$, or $\ell = 0$ d'après **2.** ce qui est contradictoire.

4. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n \in]-1\,;0[$.
Au rang 0 : $u_0^2 + u_0 < 0$, donc $u_0(u_0+1) < 0$, soit $u_0 \in]-1\,;0[$.
On suppose que pour $n \in \mathbb{N}$ fixe, $u_n \in]0\,;1[$ et on montre que $u_{n+1} \in]-1\,;0[$. On a $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.
On étudie la fonction définie par $f(x) = x^2 + x$, $x \in [-1\,;0]$.
On obtient le tableau suivant :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		0
$f'(x)$			0		
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

Donc si $u_n \in]-1\,;0[$ alors $u_{n+1} \in \left]-\frac{1}{4}\,;0\right[\subset]-1\,;0[$.
(u_n) est croissante et majorée, (u_n) converge et d'après **2.** sa limite est 0.

92 **1.**



2. Au rang 0 : $u_0 = -2$ et $u_1 = \sqrt{2}$, donc $0 \leqslant u_1 \leqslant 2$.
On suppose que pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixe, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
Alors $3 \leqslant 3 + \frac{1}{2}u_n \leqslant 4$, d'où $\sqrt{3} \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$, ainsi, on a bien $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$. On a ainsi montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{3 + \frac{1}{2}\, u_n} - u_n = \dfrac{3 + \frac{1}{2}\, u_n - u_n^2}{\sqrt{3 + \frac{1}{2}\, u_n} + u_n}$

$$= \frac{\left(u_n + \frac{3}{2}\right)(2 - u_n)}{\sqrt{3 + \frac{1}{2}\, u_n} + u_n} \, .$$

Or $0 \leqslant u_n \leqslant 2$, donc $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. (u_n) est croissante.

4. (u_n) est croissante et majorée. Donc (u_n) converge.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{3 + \frac{1}{2}\, x}$, $x \in [-2 \,;\, 2]$.

f est continue sur $[-2 \,;\, 2]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-2 \,;\, 2]$.
De plus (u_n) converge vers $\ell \in [-2 \,;\, 2]$.

Donc $\ell = f(\ell)$, soit $\ell = \sqrt{3 + \frac{1}{2}\, \ell}$, d'où $\ell = \frac{3}{2}$ ou $\ell = 2$.
Or pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 0$, donc $\ell = 2$.

SUITES ADJACENTES

93 **a.** $u_n = 2 + \dfrac{-1}{n+1}$ et $v_n = 2 + \dfrac{3}{n+2}$.

(u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$, donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

b. (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n \neq 0$, donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

c. (u_n) et (v_n) sont décroissantes, elles ne sont donc pas adjacentes.

d. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = -1$.

94 $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n}$

$$= \frac{-3n-2}{2n(n+1)(2n+1)} < 0 .$$

(U_n) est décroissante.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} - V_n = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{2(n+1)(2n+1)} > 0$.

(V_n) est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n - U_n = -\dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n - U_n = 0$.

Les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

95 (U_n) est croissante, (V_n) est décroissante.

$$\lim_{n \to +\infty} (V_n - U_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} + \frac{1}{n+1} = 0 .$$

Donc (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

96 On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $v_n > u_n > 0$.

1. Au rang 0 : $v_0 = b$, $u_0 = a$ et $b > a$ par hypothèse.
On suppose que $v_n > u_n$ sur $n \in \mathbb{N}$.
$u_n > 0$ et $v_n > 0$, donc $u_{n+1} > 0$ ainsi que $v_{n+1} > 0$.

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n}$$

$$= \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)^2 > 0 \text{ , car } u_n \neq v_n \text{ .}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > u_n > 0$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n v_n} - u_n = \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}) \geqslant 0$, car $v_n > u_n$.
Donc (u_n) est croissante.

3. $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{2} \leqslant 0$ d'après **1.**, donc (v_n) est décroissante.

4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$, $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
Donc $y^2 - x^2 - (x-y)^2 = y^2 - x^2 - x^2 + 2xy - y^2$

$$= -2(x^2 - xy) = -2x(x-y) \text{ .}$$

Or $x - y \leqslant 0$ et $x \geqslant 0$, donc $-2x(x-y) \geqslant 0$, soit :

$$y^2 - x^2 \geqslant (x-y)^2$$

98 **1.** $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)!} > 0$. Donc (u_n) est croissante.

2. $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{(n+1)!} + \dfrac{1}{(n+1)(n+1)!} - \dfrac{1}{nn!}$

$$= \frac{1}{n(n+1)(n+1)!}\,[n(n+1) + n - (n+1)^2]$$

$$= \frac{1}{n(n+1)(n+1)!}\,[-1] < 0 .$$

Donc (v_n) est décroissante.

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n - v_n = 0$.

4. (u_n) et (v_n) sont adjacentes, donc convergent vers la même limite.

5. $u_q < \dfrac{p}{q} < v_q$;

$q!u_q < (q-1)!p < q!\left(u_q + \dfrac{1}{qq!}\right)$;

$q!u_q < p(q-1)! < q!u_q + \dfrac{1}{q} < q!u_q + 1$.

Or $q!u_q \in \mathbb{N}$, d'où la contradiction.

99 **1.** $a_{n+1} - a_n = (-1)^{2n+3}\,\dfrac{1}{2n+2} + (-1)^{2n+2}\,\dfrac{1}{2n+1}$.

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$$. Donc (a_n) est croissante.

2. $b_{n+1} - b_n = (-1)^{2n+4}\,\dfrac{1}{2n+3} + (-1)^{2n+3}\,\dfrac{1}{2n+2} = \dfrac{1}{2n+3} - \dfrac{1}{2n+2} < 0$.

Donc (b_n) est décroissante.

3. $b_n - a_n = (-1)^{2n+2}\,\dfrac{1}{2n+1}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n - a_n = 0$.

4. (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

5. Il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$ et $u_{2n} \leqslant \ell \leqslant u_{2n+1}$.

6. $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_{2n+1}$, donc pour tout intervalle I ouvert contenant ℓ il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $N' \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant N \Rightarrow u_{2n} \in I$ et $n \geqslant N' \Rightarrow u_{2n+1} \in I$.

Soit $M = \max\,(N, N'+1)$, donc $n \geqslant 2M \Rightarrow u_n \in I$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$.

100 **1.** Au rang 0 : $u_0 \in \mathbb{Q}$ et $v_0 \in \mathbb{Q}$, car $u_0 = 0$ et $v_0 = 2$.
On suppose pour $n \in \mathbb{N}$ que $u_n \in \mathbb{Q}$ et $v_n \in \mathbb{Q}$, donc :

$$\frac{u_n+1}{u_n+2} \in \mathbb{Q} \quad \text{et} \quad \frac{v_n+1}{v_n+2} \in \mathbb{Q}.$$

Soit $u_{n+1} \in \mathbb{Q}$ et $v_{n+1} \in \mathbb{Q}$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Q}$ et $v_n \in \mathbb{Q}$.

2. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + 1 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \dfrac{-u_n^2 - u_n + 1}{u_n + 2}$.

Soit $\ell = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\ell' = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - \ell)(u_n - \ell')}{u_n + 2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} - v_n = \frac{-(v_n - \ell)(v_n - \ell')}{v_n + 2}.$$

3. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $0 \leqslant u_n \leqslant \ell$ et $v_n \geqslant \ell$.
Au rang 0 : $u_0 = 0$, donc $0 \leqslant u_0 \leqslant \ell$ et $v_0 = 2$, donc $v_0 \geqslant \ell$.
On suppose pour $n \in \mathbb{N}$ que $0 \leqslant u_n \leqslant \ell$ et $v_n \geqslant \ell$.

Soit f la fonction définie sur $]-2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$.

x	-2	0	ℓ'	ℓ	$+\infty$
$f'(x)$	||		$+$		
$f(x)$	|| $-\infty \nearrow$	$\frac{1}{2} \nearrow$	$\ell' \nearrow$	$\ell \nearrow$	1

• Si $0 \leqslant u_n \leqslant \ell$
$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(\ell)$
$\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant \ell$,
donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \ell$.
• Si $v_n \geqslant \ell$, alors :
$f(v_n) \geqslant f(\ell)$ $v_{n+1} \geqslant \ell$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 \leqslant u_n \leqslant \ell$ et $v_n \geqslant \ell v$. Ainsi :

$$u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad v_{n+1} - v_n \leqslant 0.$$

(u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.

4. $\ell = f(\ell)$, donc $\ell = \dfrac{\ell+1}{\ell+2}$.

5. $\ell = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, car $\ell \geqslant 0$.

101 **1.** $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}>0$. Donc (u_n) est croissante.

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{(n+1)^2n}$$

$$=\frac{n+n^2+n-n^2-2n-1}{n(n+1)^2}=\frac{-1}{n(n+1)^2}<0 .$$

(v_n) est décroissante.

$u_n-v_n=-\dfrac{1}{n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-v_n=0$.

(u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2. On trouve 1,6.

102 $\forall n\in\mathbb{N}$:

- $u_{n+1}-u_n=\dfrac{v_n-u_n}{2}=\dfrac{-\frac{1}{n}}{2}=-\dfrac{1}{2n}<0$. Donc (u_n) est décroissante ;
- $v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n}=-\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{2n}$

$$=\frac{2n-(n+1)}{2n(n+1)}=\frac{n-1}{2n(n+1)}\geqslant 0 \text{ lorsque } n\geqslant 1 .$$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

- $u_1=1$ et $v_1=1+1=2$. • $u_2=\dfrac{3}{2}$ et $v_2=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}=2$.
- $u_3=\dfrac{7}{4}$ et $v_3=\dfrac{7}{4}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{25}{12}$.

103 • $u_{n+1}-u_n=-2\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=2\times\dfrac{n+1-(n+2)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}$

$$+\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2})\sqrt{n+1}}\geqslant 0 .$$

(u_n) est donc croissante.

• $v_{n+1}-v_n=-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=2\ \dfrac{n-(n+1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$

$$=\frac{-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n+1}}\leqslant 0 .$$

(v_n) est décroissante.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n-v_n=-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n}=\dfrac{-2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$,

donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n-v_n=0$.

Ainsi les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

104 **1.** $u_0 = 1$, donc $u_0 \geqslant -4$. On suppose $u_n \geqslant -4$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$\frac{1}{2}\, u_n - 2 \geqslant -4$, donc $u_{n+1} \geqslant -4$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant -4$.

2. $u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{2}\, u_n - 2 \leqslant 0$, car $u_n \geqslant -4$.

Donc (u_n) est décroissante.

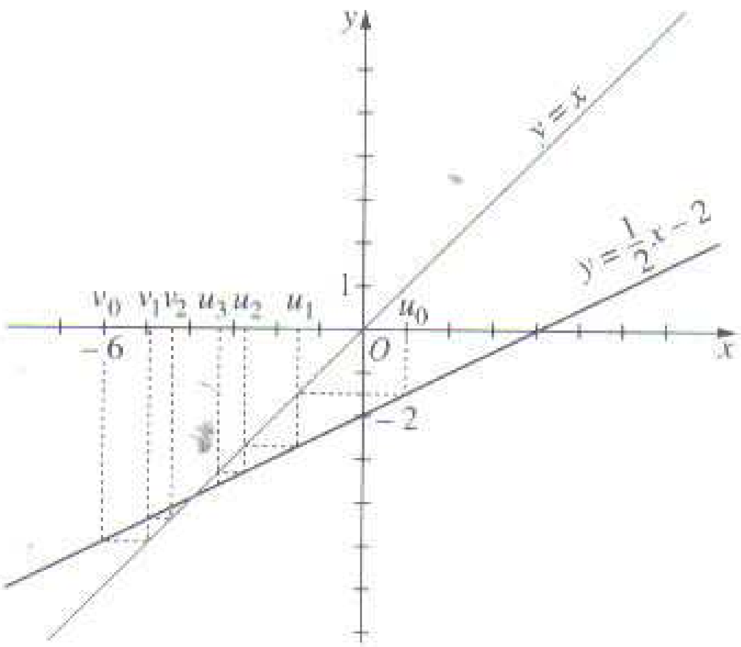
3. $v_0 = -6$ et $v_0 \leqslant -4$. On suppose $v_n \leqslant -4$ pour $n \in \mathbb{N}$.

$\frac{1}{2}\, v_n - 2 \leqslant -4$, donc $v_n \leqslant -4$. Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \leqslant -4$.

4. $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{2}\, v_n - 2 \geqslant 0$, car $v_n \leqslant -4$.

Donc (v_n) est croissante.

5.



6. $w_{n+1} = u_n - v_n = \frac{1}{2}\, u_{n-1} - 2 - \left(\frac{1}{2}\, v_{n-1} - 2\right) = \frac{1}{2}\, w_n$.

$w_n = u_{n-1} - v_{n-1}$.

(w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 7.

7. $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$, donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

8. (u_n) et (v_n) convergent.