DERIVATION

I) Dérivée d'une *f*onction

f désigne une *f*onction dé*f*inie et dérivable sur un intervalle I .

1°) *F*ormulaires des *f*onctions usuelles

Ce tableau doit être connu par*f*aitement.♥

f	Df	f'	D f'
a	R	0	R
ax+b		a	
x^2		$2x$	
x^3		$3x^2$	
x^n n∈ N*		nx^{n-1}	
$\dfrac{1}{x}$	R*	$-\dfrac{1}{x^2}$	R*
$\dfrac{1}{x^2}$	R*	$-\dfrac{2}{x^3}$	R*
$\dfrac{1}{x^3}$	R*	$-\dfrac{3}{x^4}$	R*
$\dfrac{1}{x^n}$ n∈ N*	R*	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	R*
$\sqrt{x}$	R^+ = [0 ; +∞[	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	R^{+*}=] 0 ; + ∞[
cos$x$	R	-sin$x$	R
sin$x$	R	cos$x$	R
tan x	R\{ (2k+1)π/2 ;k ds Z}	$1 + \tan^2 x$	R\{ (2k+1)π/2 ;k ds Z}
Arccos x	[-1 ;1]	$\dfrac{-1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	]-1 ;1[
Arcsin x	[-1 ;1]	$\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$	]-1 ;1[
Arctan x	R	$\dfrac{1}{x^2+1}$	R
ln$x$	R^{*+}	$\dfrac{1}{x}$	R*
e^x	R	e^x	R
x^α où α>0 **Fonctions puissances**	R^{*+}	$\alpha\, x^{\alpha-1}$	R^{*+}
a^x avec a>0 **Fonctions exponentielles de base a**	R	$(\ln a)a^x$	R

Remarque : si p∈ Z* (avec si x∈ R* si p≤-1) alors nous avons la formule générale résumant les formules 1 et 2 $(x^p)' = px^{p-1}$

par exemple pour tout x de R* $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$ d'où $(x^{-4})' = -4\,x^{-4-1} = -4x^{-5} = \frac{-4}{x^5}$

Exemples :

$f(x) = x^4$ alors $f'(x) = 4x^3$; pour tout x de R* si $f(x) = \frac{1}{x^3}$ alors $f'(x) = -\frac{3}{x^4}$.

2°) Opérations sur les fonctions dérivables :rappel des formules usuelles complément sur la dérivation.

Dans ce paragraphe les fonctions u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

♥

OPERATIONS	EXEMPLES : Dans chaque cas calculer la dérivée de la fonction donnée sur I.
Somme $(U + V)' = U' + V'$	Soit f la fonction définie sur [1 ;18] par $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ $f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$
Produit par un réel $(aU)' = aU'$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = 5\,x^6$ $f'(x) = 30\;x^5$
Produit $(UV)' = U'V + UV'$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (x^6 + x)(2x^5 + 1)$ $f'(x) = 22\;x^{10} + 18\,x^5 + 1$
Carré $(U^2)' = 2U'.U$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (x^4 + x^3 - 5)^2$ $f'(x) = 2.(4\,x^3 + 3x^2)(x^4 + x^3 - 5) = 2\,x^2\,(4\,x^3 + 3)(x^4 + x^3 - 5)$
Puissance entière $(U^n)' = n\,U'.U^{n-1}$ Où n≥1, n entier naturel	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = (x^2 + 3x + 4)^3$ $f'(x) = 3.(2x + 3)(x^2 + 3x + 4)^2$
Inverse (U ≠ 0 sur I) $\left(\frac{1}{U}\right)' = -\frac{U'}{U^2}$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ $f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$
$\left(\frac{1}{U^n}\right)' = -n\frac{U'}{U^{n+1}}$ où U ≠ 0 sur I et n entier naturel	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^3}$ $f'(x) = -\frac{3.(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^4}$
Quotient(V≠ 0 sur I) $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \frac{3x + 1}{x^2 + 2}$ $f'(x) = \frac{-3x^2 - 2x + 6}{(x^2 + 2)^2}$

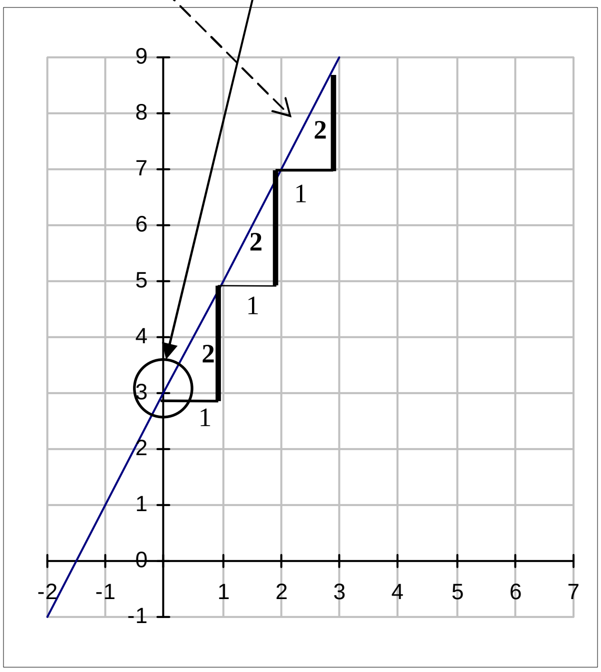
Racine carrée(U>0 sur I) $\sqrt{U} = \dfrac{U'}{2\sqrt{U}}$	Soit f la fonction définie sur [3 ; 10] par $f(x)= \sqrt{x^2 - x - 2}$ $f\,'(x) = \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{(x^2 - x - 2)}}$
Soit U une fonction dérivable sur I avec U>0 sur I $(\ln U)' = \dfrac{U'}{U}$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \ln(x^2 + 2)$ $f\,'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$
$(e^U)' = U'e^U$	Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \exp(x^2 + 2)$ $f\,'(x) = 2x \exp(x^2 + 2)$

<u>II)Interprétation graphique du nombre dérivé : tangente à une courbe .</u>

<u>1°) Equation de droite et coefficient directeur d'une droite</u>

<u>a) Droite sécante à l'axe des ordonnées</u>

<u>Exemple</u> : Soit D la droite d'équation $y = 2\,x + 3$.



2 est le **<u>coefficient directeur</u>** de la droite D.
(On dit aussi la pente de la droite D)
On peut le lire graphiquement .

3 est l'ordonnée du point d'intersection de D avec l'axe (Oy).

Attention à l'unité

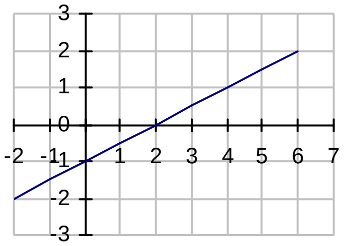
Cas général : Une droite sécante à l'axe des ordonnées a une équation de la forme **y = m *x* + p** où

m est le coefficient directeur de la droite et où

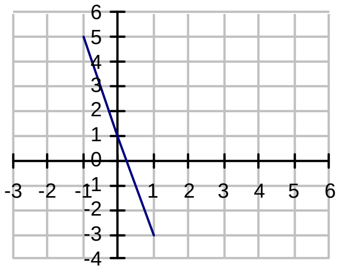
p est l'ordonnée à du point d'intersection de D avec l'axe (Oy).

Remarque :

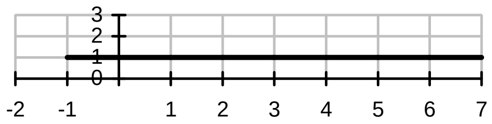
Lorsque m est POSITIF la droite « monte vers les y positifs »



Lorsque m est NEGATIF la droite « descend vers les y négatifs »



Si m est NUL la droite est PARALLELE A L'AXE DES ABSCISSES ou HORIZONTALE.

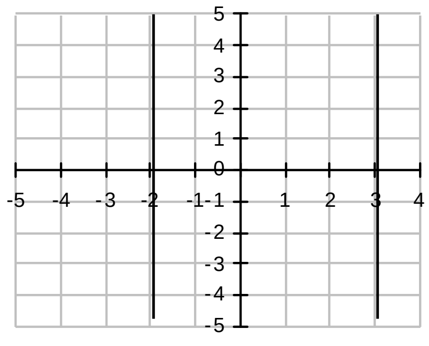


b) Droite parallèle à l'axe des ordonnées

Une droite parallèle à l'axe des ordonnées (ou verticale) a une équation de la forme x = c .

Exemples :

$x = -2$



$x = 3$

Remarque : ATTENTION elle n'a pas de coefficient directeur !

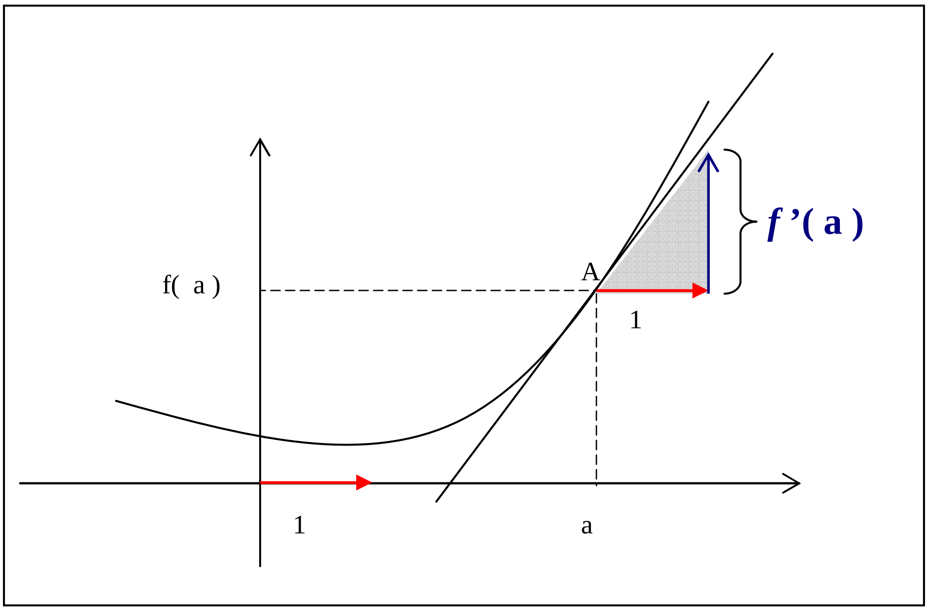
2°) Tangente à une courbe et nombre dérivé

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un élément de I.C est la courbe de f dans un repère (O ; i , j) .
Si f ' est la fonction dérivée de f sur I alors
le nombre dérivé de f en a est f '(a) et

Le coefficient directeur de la tangente à C

au point d'abscisse a est

$\boxed{f'(a)}$



Conséquence

Une équation de la tangente à C en au point A d'abscisse a c'est - à - dire au point de coordonnées (a ; f (a))

est

$$\boxed{y = f'(a) . (x - a) + f(a)}$$

Exercices

Exemple

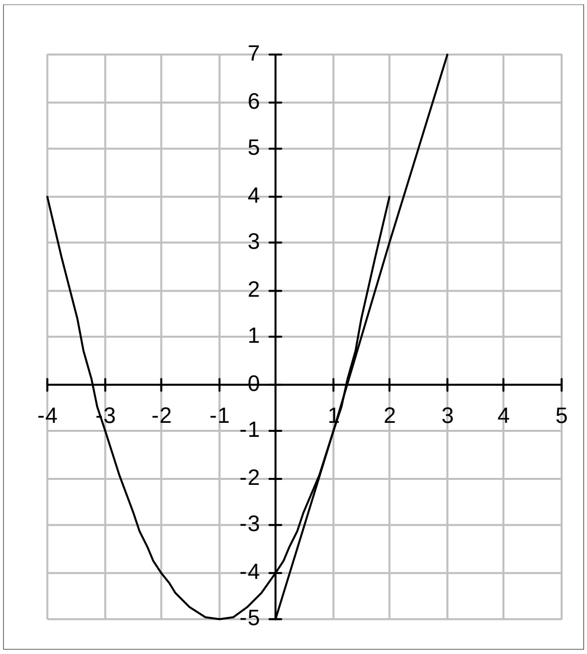
1°) Représenter graphiquement la fonction f définie sur [-4 ; 2] par $f(x) = x^2 + 2x - 4$ .On note C la courbe obtenue .

2°) Calculer la dérivée f' de f.

3°) Montrer qu'une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 1 est y = 4x - 5 .

4°) Tracer T .

1°)



2°) $f'(x) = 2x + 2$

3°) Equation de la tangente T au point d'abscisse 1 :

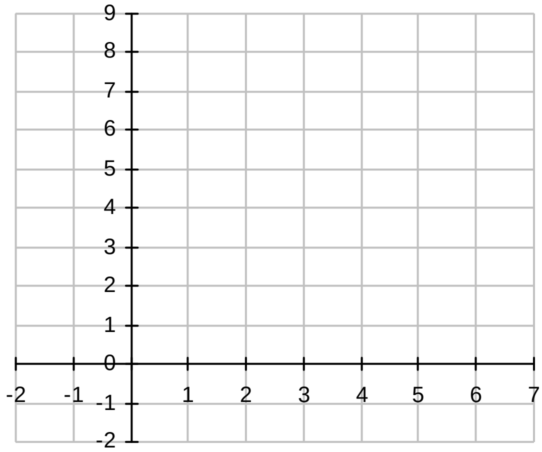
$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

soit $y = 4(x - 1) - 1$

Soit encore $y = 4x - 5$

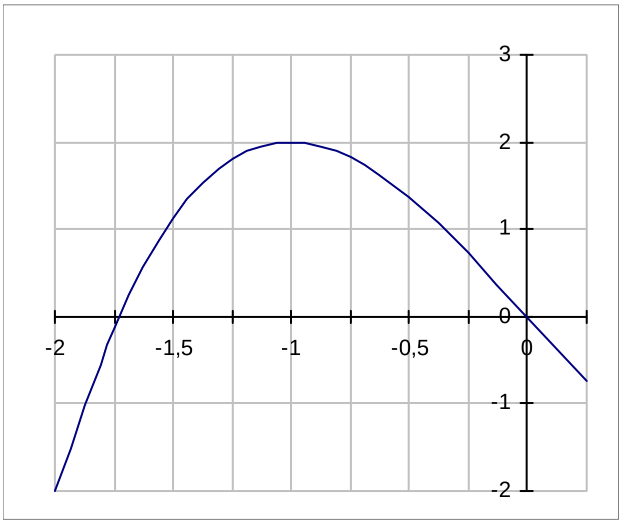
Exercice 1

1°) Représenter graphiquement la *f*onction *f* dé*f*inie sur [-2 ; 4] par $f(x) = x^2 - 2x$. On note C la courbe obtenue .
2°) Calculer la dérivée *f*' de *f*.
3°) Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 2.
4°) Tracer T .



Exercice 2

Soit *f* la *f*onction dé*f*inie sur [-2 ; ¼] par $f(x) = x^3 - 3x$ dont la courbe C est donnée ci-contre.

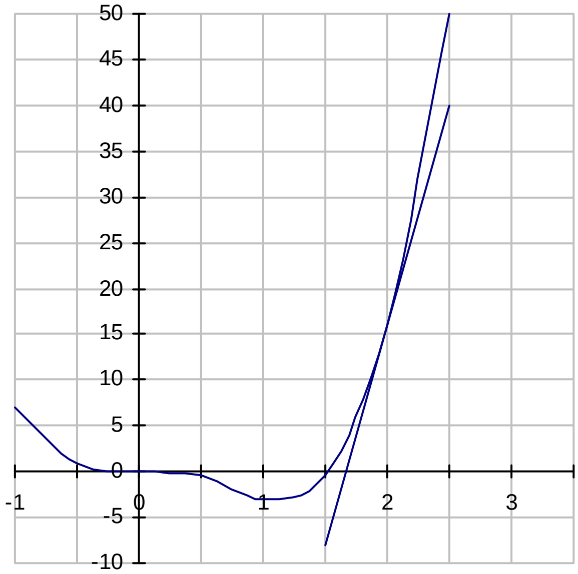


1°) Tracer la tangente à C au point d'abscisse -1.
2°) Donner une équation de la tangente à C au point O.

Remarque : Une équation de la tangente au point O ,origine du repère , s'écrit $\mathbf{y = f'(0)\,x + f(0)}$

Exercice 3

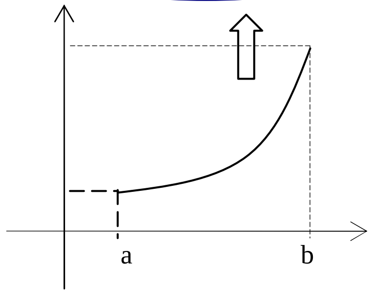
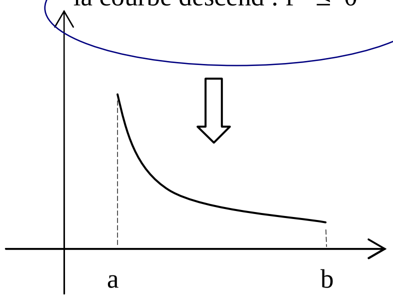
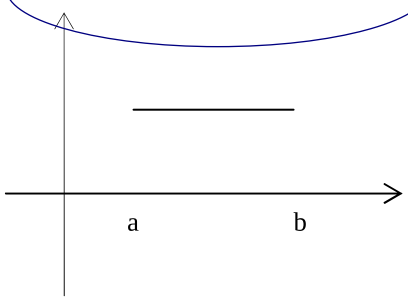
Soit *f* la *f*onction dé*f*inie sur [-2 ;2] dont la courbe C est donnée ci-contre.



1°) Déterminer le nombre dérivé de *f* en 2.
2°) Donner une équation de la tangente à C au point d'abscisse .

III) Signe de la dérivée et sens de variation.

1°) Théorème fondamental f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

VARIATIONS	COURBE	TABLEAU
Si f ’$\geq$ 0 sur I Alors f est **croissante** sur I.	la courbe monte : f ’ $\geq$ 0 	x : a … b f ’(x) : + f(x) : f(a) ↗ f(b)
Si f ’ $\leq$ 0 sur I alors f est **décroissante** sur I.	la courbe descend : f ’ $\leq$ 0 	x : a … b f ’(x) : - f(x) : f(a) ↘ f(b)
Si f ‘ = 0 sur I alors f est constante sur I.	La courbe est horizontale :f ’=0 	x : a … b f(x) : f(a) → f(b)

2°) Application à l’étude des variations d’une fonction

a) Exemple 1 : On veut étudier les variations de la fonction f définie sur [-10 ; 10] par f(x)= $x^3 - x^2 - x + 3$

Pour cela on calcule la dérivée f ’de f et on étudie le signe de f ’ sur R : f ’(x)= $3x^2 - 2x - 1$ .D’après la règle sur le signe du trinôme on a donc le signe de f ’(x) et le tableau de variation de f :

x	-10		- 1/3		1		10
f’(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	-1087	↗	**86/27**	↘	2	↗	893

Remarque : dans le tableau de variation on ne met (sauf précisions contraires du texte) que des **valeurs EXACTES** !

b) Exemple 2 : Etudier les variations de la fonction g définie sur R par $g(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x - 1}$

c) Exemple 3 : Etudier les variations de la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{x^2 + x + 4}{x^2 + 1}$ sur R

IV) Dérivation et applications

1°) Extrémum local

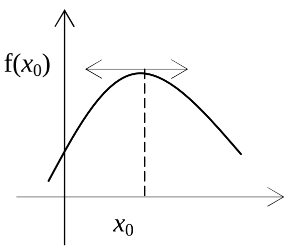
Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert] a , b[et $x_o \in$]a , b[.

Si f '(x) s'annule en xo <u>en changeant de signe</u> alors f admet en xo un extrémum local .

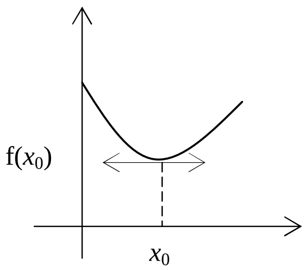
x		x_o	
f '(x)	+	0	-
f(x)	↗	f(x_o)	↘

maximum



x		x_o	
f '(x)	+	0	-
f(x)	↘	f(x_o)	↗

minimum



<u>Remarque</u> : en un extremum local la tangente est **<u>horizontale</u>**.

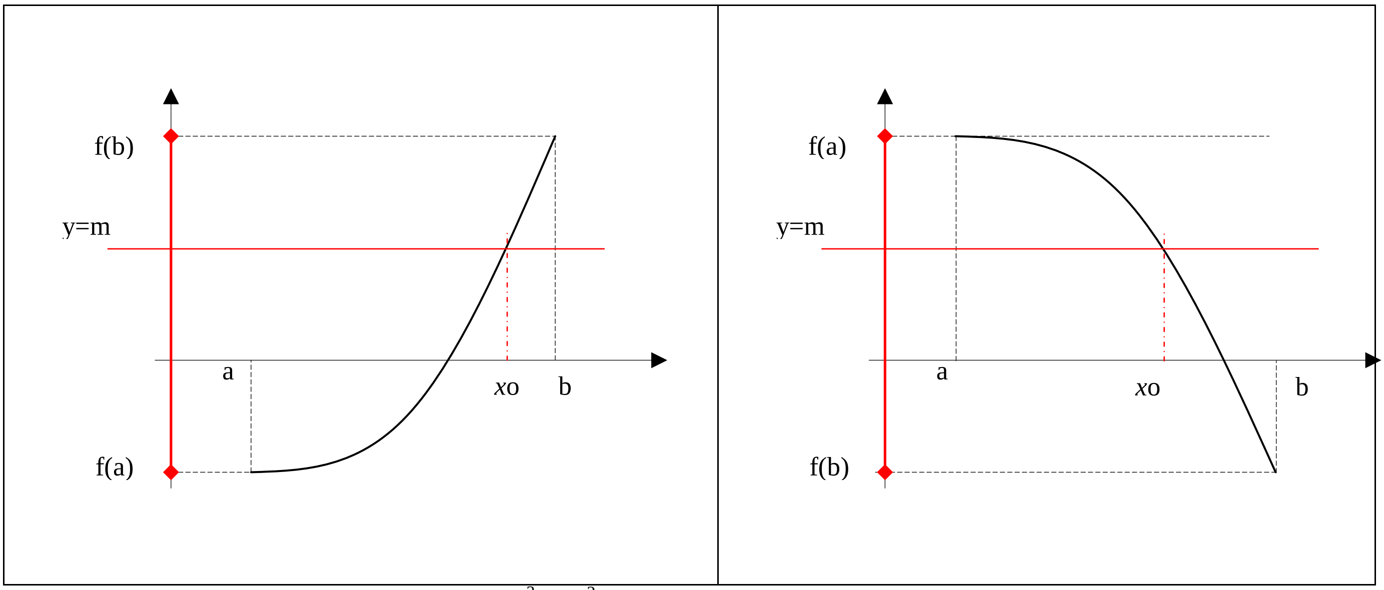
<u>Contre - exemple</u> : **<u>Attention</u>** si f '(x) s'annule sans changer de signe alors il n'y a pas d'extremum .
Considérons la fonction f (x)= x^3 sur [-2, 2] ; on a bien f '(0)=0 cependant comme f '(x)=$3x^2$ ne change pas de signe sur [-2 ;2](f'(x)$\geq$ 0) il n'y a pas d'extremum en 0 .

2°) Résolution d'équations du type f(x)= m .

Théorème

1. Soit f une fonction dérivable sur [a ;b] telle que f ' > 0 sur]a ;b[alors pour tout réel m de [f(a) ; f (b)] l'équation f(x)=m admet une unique solution xo dans [a ;b] .

2. Soit f une fonction dérivable sur [a ;b] telle que f ' < 0 sur]a ;b[alors pour tout réel m de [f(b) ; f (a)] l'équation f(x)=m admet une unique solution xo dans [a ;b] .

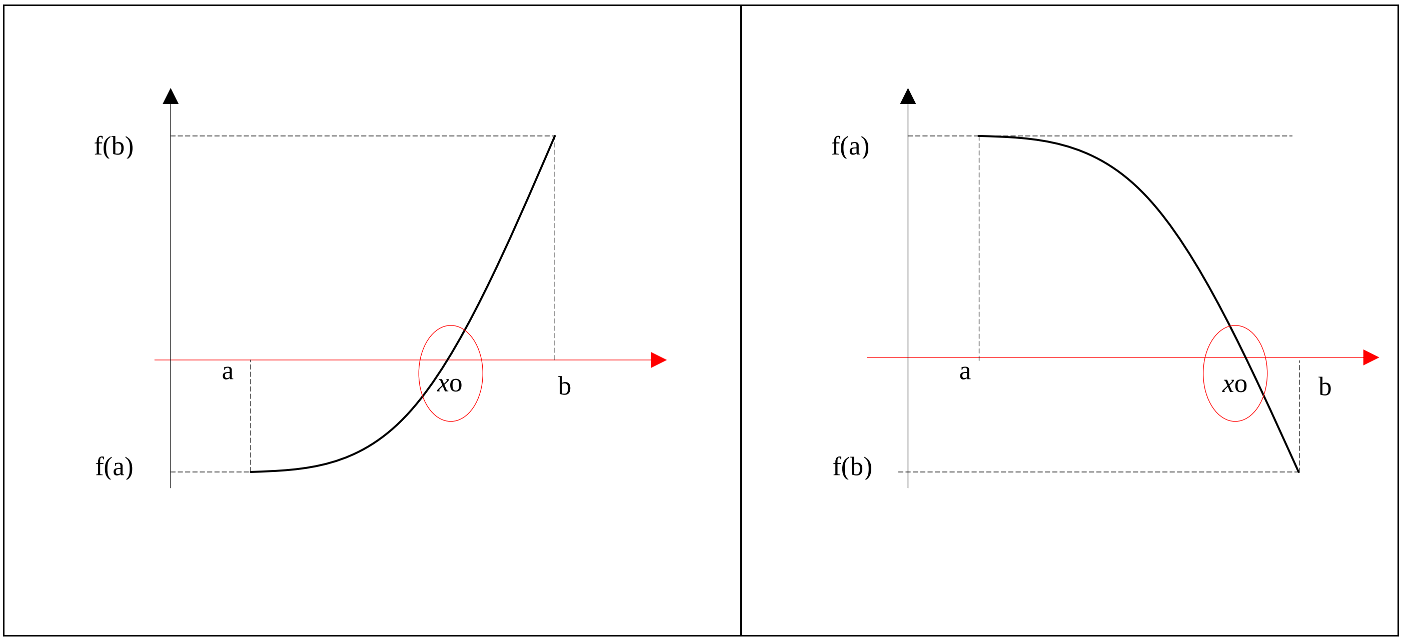


Soit f la fonction définie sur I=[0 ;2] par f(x) =x^3 - 3x^2 + 2 .Montrer que l'équation f(x)= 1 admet une unique solution dans I.

Conséquence

Soit f une fonction dérivable sur [a ;b]. Si f ' > 0 (ou f '< 0) sur]a ;b[et si f(a)×f(b) < 0 alors l'équation f(x)=0 admet une unique solution xo dans [a ;b] .

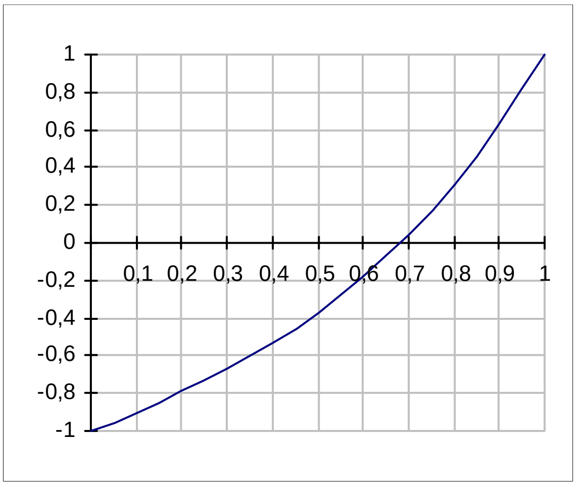
Remarque : Dire que f(a)×f(b) < 0 signifie que les nombres f(a) et f(b) sont de signes contraires



Problème...

Soit f la fonction polynôme définie sur I=[0 ;1] par f(x)= $x^3 + x - 1$. Ce polynôme n'admet pas de racines évidentes dans I , on va donc essayer de trouver la solution de f(x)= 0 à l'aide d'une autre méthode.

Sur la courbe ci-contre on voit que l'équation f(x)=0 admet bien une solution dans I. Grâce au théorème suivant nous allons le démontrer **Résolution du problème .**



Dans un premier temps on va donc démontrer l'existence de la solution. Pour cela on étudie les variations de f sur [0 ;1]. f '(x)= $3x^2 + 1$ donc f'(x) > 0 sur I . Le tableau de variation est donc :

x	0	1
f '(x)	+	
f(x)	-1	1

Comme f ' > 0 sur]0 ;1[et comme f(0)×f(1) = -1 c'est- à - dire f(0)×f(1) < 0 alors l'équation f(x)=0 admet une unique solution xo dans [0 ;1] .

Maintenant que l'on a démontré l'existence et l'unicité de la solution de l'équation f(x)= 0 on va donné à l'aide de la calculatrice un encadrement de cette solution à 10^{-2} près. En effet on a :

$$0 < xo < 1$$

On va diviser l'intervalle I en 10 intervalles de longueur 0.1 , on dit que l'on effectue un balayage avec un pas de 0.1. On obtiendra alors une valeur approchée de xo à 10^{-1} près :

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
f(x)	-1	-0.9	-0.8	-0.7	-0.5	-0.4	-0.2	0.05	0.3	0.6

On constate que f(0.6)×f(0.7) < 0 donc d'après le théorème 0.6 < xo < 0.7

On recommence la même opération avec l'intervalle [0.6 ;0.7] et on obtient d'après le théorème ,

puisque f(0.68)≈-0.006 et que f(0.69))≈0.02 c'est - à - dire f(0.68)×f(0.69) < 0 , que $\boxed{\mathbf{0.68 < xo < 0.69}}$.

qui est l'encadrement à 10^{-2} de xo .

EXEMPLE :

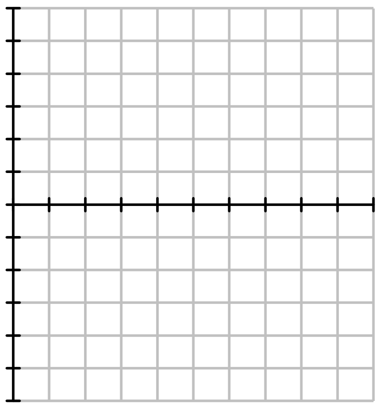
Résoudre dans [1 ;2] l'équation $x^3 - 2x - 1 = 0$. (On considère la fonction f(x)= $x^3 - 2x - 1$ et on étudie les variations de f dans [1 ;2])

Notion de fonction réciproque
Soit f une dérivable et strictement monotone sur un intervalle I quelconque. Posons J = f (I). J est un intervalle;Alors :

- Pour tout réel x dans I, f(x) est dans J
- Pour tout réel y dans J, il existe un unique x tel que f (x) =y.

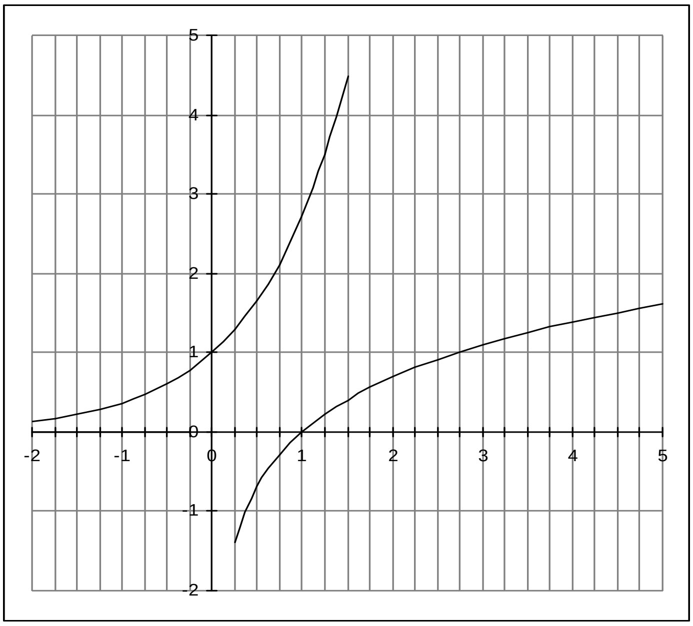
Lorsque ces deux conditions sont réunies ,on dit que f est une bijection de I sur J.On peut alors définir une fonction g
Sur J de la façon suivante :
Si y$\in$J et si y = f(x) alors g(y) = x . On dit que g est la bijection ou fonction réciproque de f .
Il en résulte que pour tout réel x de I g(f (x)) = x et pour tout y dans J f(g(y))= y.

Exemple :
I =[0 ; +∞[. f (x) = x^2.   Déterminer la fonction g
Construire leurs courbes respectives , qu'observez – vous?.



EXEMPLES DE BIJECTIONS ET DE LEURS BIJECTIONS RECIPROQUES

FONCTION EXPONENTIELLE ET LN



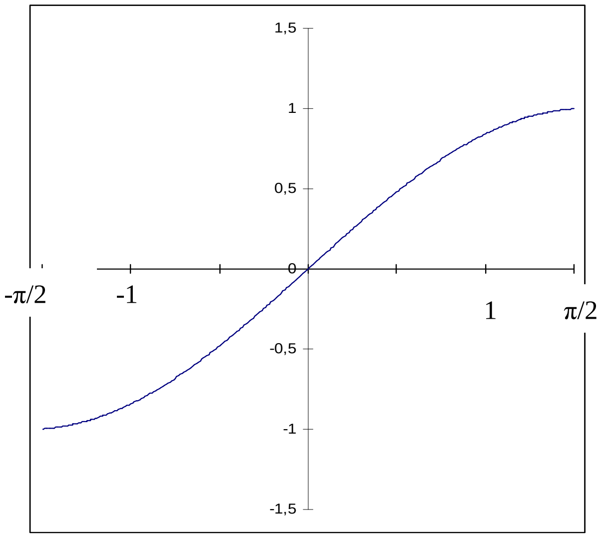
Propriété

La fonction exponentielle, notée exp, est la fonction définie sur R à valeur dans]0 ; + ∞ [par :

exp : R $\rightarrow$] 0 ; + ∞ [
x $\rightarrow$ e^x où y = e^x équivaut à ln y = x

La fonction exp est la fonction réciproque de la fonction ln

FONCTION SINUS ET ARC SINUS



La fonction sinus est une bijection croissante de [-π/2 ;π/2] dans [-1 ;1].

Rappels :

$\sin(x + 2\pi) = \sin x$

$\sin(-x) = -\sin x$

$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$

Définition

La fonction réciproque de la fonction sinus restreinte à l'intervalle de définition [-π/2 ;π/2] est appelée arc sinus.
On la note Arcsin ou $\sin^{-1}$ et elle est ainsi définie :

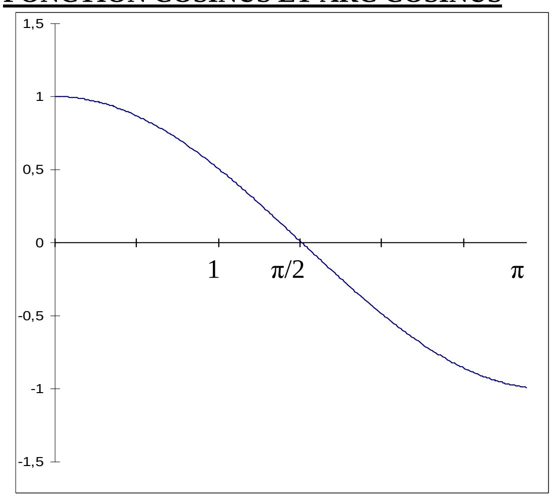
$[-1 ;1] \rightarrow [-\pi/2 ;\pi/2]$

$x \rightarrow y = \text{Arcsin } x$ équivaut à $\sin y = x$

DERIVEE : $(\text{Arcsin } x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Exemple : Arcsin (½) = π/6

FONCTION COSINUS ET ARC COSINUS



La fonction sinus est une bijection croissante de [0 ;π] dans [-1 ;1].

Rappels :

$\cos(x + 2\pi) = \cos x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$

Définition

La fonction réciproque de la fonction cosinus restreinte à l'intervalle de définition [0 ;π] est appelée arc cosinus.
On la note Arccos ou $\cos^{-1}$ et elle est ainsi définie :

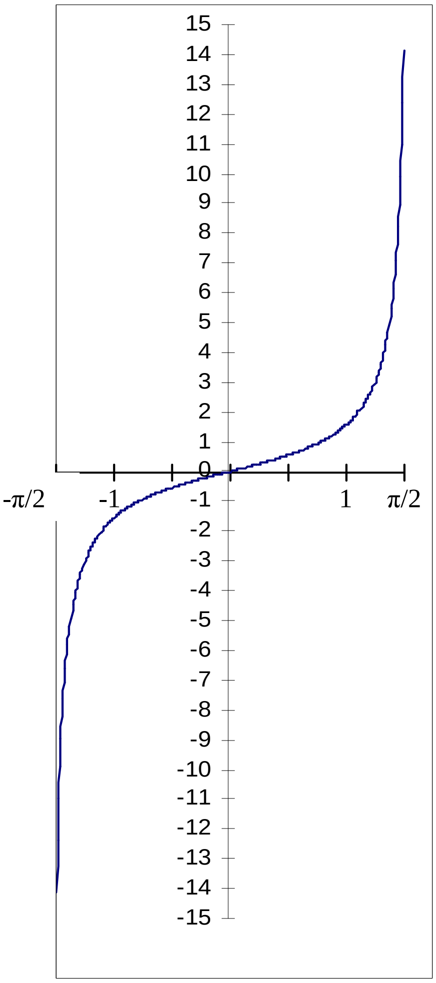
$[-1 ;1] \rightarrow [0 ; \pi]$

$x \rightarrow y = \text{Arccos } x$ équivaut à $\cos y = x$

DERIVEE : $(\text{Arcsin } x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

Exemple : Arccos x (- ½) = 2π/3

FONCTION TANGENTE ET ARC TANGENTE



La fonction tangente est une bijection croissante de]-π/2 ;π/2[dans R.

Rappels :

tan (x + π) = tan x

tan (-x) = - tan x

$\boxed{(\tan x)' = 1 + \tan^2 x}$

Définition

La fonction réciproque de la fonction tangente restreinte à l'intervalle de définition]-π/2 ;π/2[est appelée arc tangente.

On la note Arctan ou $\tan^{-1}$ et elle est ainsi définie :

]-π/2 ;π/2[⟶ R

x ⟶ y = Arctan x équivaut à tan y = x

DERIVEE : $(\text{Arctan } x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$

Exemple : Arctan x (- 1) = -π/4

Rappel : Tableau de valeurs avec les angles remarquables

x	0	π/6	π/4	π/3	π/2	π
sin x	0	½	√2	√3/2	1	0
cos x	1	√3/2	√2	½	0	-1
$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$	0	√3/3	1	√3		0