DEVOIR N° 3 TS 04/11/10 CORRECTION

100 f est continue sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions continues su
$\mathbb{R}$. Cependant :

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = -3 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = 3 \ .$$

Donc f n'est pas dérivable en 1 :

$$\lim_{\substack{x \to 2,5 \\ x < 2,5}} \left(\frac{f(x) - f(2,5)}{x - 2,5} \right) = -3 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x \to 2,5 \\ x > 2,5}} \left(\frac{f(x) - f(2,5)}{x - 2,5} \right) = 3 \ ,$$

donc f n'est pas dérivable en 2,5.

Remarque : Soit $g : x \mapsto |f(x)|$ avec f dérivable sur $\mathbb{R}$ et f s'annulan
en x_0 . Si $f'(x_0) = 0$, g est dérivable en x_0 sinon, non ! (À vous de voi
pourquoi.)

114 **1.** La fonction h est croissante, avec $h(0) = 0$, sur $[0 \ ; +\infty[$, donc pour tout $x \geqslant 0$, $x \geqslant \sin x$.

2. La fonction $i : x \mapsto \frac{x^2}{2} + \cos x - 1$ est croissante avec $i(0) = 0$ sur $[0 \ ; +\infty[$, donc pour tout x positif ou nul, $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1$.

3. Enfin : $j : x \mapsto \frac{x^3}{6} + \sin x - x$ est croissante avec $j(0) = 0$ sur $[0 \ ; +\infty[$, donc pour tout $x \geqslant 0$, on a le résultat.
Bien évidemment on peut poursuivre le résultat indéfiniment puisque :

$$i'(x) = h(x) \quad \text{et} \quad j'(x) = i(x) \ .$$

Remarque : Notamment on montrerait que :

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \quad \text{et} \quad x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \ .$$

119 **1.** Il suffit de réduire $f'(x)$ au dénominateur x^2
$g(x)$ apparaît alors…

2. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) = 12x^2 + 2x = 2x(6x+1)$ ce qui entraîne :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{6}$		0		$+\infty$
$g(x)$		$\nearrow$	$\frac{10}{6^3} - 4 < 0$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	

Autrement dit en utilisant le théorème de la bijection sur $[0\ ;\ +\infty[$ on montre que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et vu que $g(1) = 1 > 0$ alors $0 < \alpha < 1$.
On obtient $\alpha \approx 0{,}923$.

3. On en déduit :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$f(x)$	$\nearrow$	$+\infty$

4. a. $f'(x) = 2x + \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2}$, donc $f'(-1) = -2 + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{7}{2}$.

Une équation de (T) est :

$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1).$$

b. On étudie la différence.

$$\Delta(x) = f(x) - T(x).$$

111 **a.** $(z-3)(az^2 + bz + c) = az^3 + z^2(b-3a) + z(c-3b) - 3c$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -5 \\ c - 3b = 11 \\ -3c = -15 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ c = 5 \\ b = -5 + 3a = -2 \end{cases}$$

$z^3 - 5z^2 + 11z - 15 = (z-3)(z^2 - 2z + 5)$.

b. $S = \{3\ ;\ 1 - 2\mathrm{i}\ ;\ 1 + 2\mathrm{i}\}$.