CORRECTION DES EXOS SUR L'EXPONENTIELLE

Limites et exponentielle

31 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -1$; $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -4$; $\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$.

32 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$; $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$.

33 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$; $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 0$.

34 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} g(x) = -1$; $\lim_{x \to -\infty} h(x) = -e$.

35 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$; $\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$.

37 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

38 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$; $\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

39 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

40 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

31 – • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -4$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x)^2 = 0$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 - x + 1 = \lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$ donc

$\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$ d'après le théorème de composition des limites.

32 – • $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-2x} \times (1)}{e^{-x} \times (e^x - 1)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^{-x}}{e^x - 1} = -\infty$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} -x = +\infty$ $\lim\limits_{X \to +\infty} e^X = +\infty$

donc par composition $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} \left(2e^x - 1 \right) = -\infty$

puisque $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^{-x})^2 = +\infty$ (Voir ci-dessus)

et $\lim\limits_{x \to -\infty} 2e^x - 1 = -1$.

• $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$ car $\lim\limits_{x \to -\infty} 5x^2 + x^3 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^X = 0$ avec la composition de limite.

33 – • $\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$ d'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{5x} - 2x e^{5x} = \lim\limits_{x \to -\infty} (e^x)^5 - 2x e^x . (e^x)^4 = 0$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

• $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(3x^4 e^x - 4x^3 e^x + x^2 e^x - 2e^x \right) (e^x)^{11} = 0$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ n entier naturel

34 - $f(x) = e^{x^2} - x^2e^{-x} = e^{x^2}\left(1 - x^2e^{-x-x^2}\right)$

Cette limite est très difficile à démontrer car il faut faire un changement de variable.

En effet $-x-x^2 = -\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}$ (forme canonique)

et on pose $X = x + \frac{1}{2}$ ce qui donne $x = X + \frac{1}{2}$.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2}\left(1 - x^2e^{-x-x^2}\right)$

Par composition des limites on montre que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x^2} = +\infty$.

Maintenant montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2e^{-x-x^2} = 0$.

On pose $x = X + \frac{1}{2}$ ce qui donne $x^2e^{-x-x^2} = \left(X+\frac{1}{2}\right)^2e^{-X^2+\frac{1}{4}}$

Or $\left(X+\frac{1}{2}\right)^2e^{-X^2+\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}}\left[X^2e^{-X^2} + Xe^{-X^2} + \frac{1}{4}e^{-X^2}\right]$

$\lim\limits_{X \to -\infty} X^2e^{-X^2} = 0$ et $\lim\limits_{X \to -\infty} e^{-X^2} = 0$ (composition des lim)

Par contre $\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^{-X^2} = 0$ est plus long.

On a $\lim\limits_{X \to +\infty} Xe^{-X^2} = 0$ car si $X > 1$ ($X \to +\infty$!)

$X^2 > X$ et $-X^2 < -X$

d'où $e^{-X^2} < e^{-X}$ soit comme X positif !

$Xe^{-X^2} < Xe^{-X}$ et par comparaison des limites $\lim\limits_{X \to +\infty} Xe^{-X^2} = 0$. Pour obtenir la limite en $-\infty$ il suffit d'écrire $\lim\limits_{X \to -\infty} X e^{-X^2} = \lim\limits_{X \to +\infty} -X e^{-X^2} = 0$!

Remarque :

$\lim\limits_{x \to -\infty} xe^{x} = 0$ donc

si $x = -t$

$\lim\limits_{t \to +\infty} -te^{-t} = 0$

càd $\lim\limits_{t \to +\infty} te^{-t} = 0$

34 suite $g(x) = \dfrac{e^{-x}\left(1+e^{x}\right)}{e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)} = \dfrac{1+e^{x}}{e^{2x}-1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} (e^{x})^{2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$

$h(x) = \dfrac{3e.e^{x}+e^{2}}{e^{x}-e}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$ d'où le résultat.

35. • $f(x) = e^{-2x}\left(e + 2xe^{2x} - 3e^{2x}\right)$

• $g(x) = \dfrac{e^{-2x}}{e^{-4x}} \dfrac{e^{5x}-1}{1+e^{7x}} = e^{2x}.\dfrac{e^{5x}-1}{e^{7x}+1}$

• $h(x) = e^{-3x}\left(1-e^{x}\right)$

41 **a.** Sur $\mathbb{R}$, $e^{x}(x+1)$; **b.** Sur $\mathbb{R}^*$, $\dfrac{e^{x}(x-1)}{x^{2}}$.

43 **a.** Sur $\mathbb{R}$, $e^{2x}+e^{-2x}$; **b.** Sur $\mathbb{R}^*$, $\dfrac{-2e^{x}}{(e^{x}-1)^{2}}$.

44 **a.** Sur $\mathbb{R}^*$, $-\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{2}}$; **b.** Sur $\mathbb{R}$, $(-\sin x)e^{\cos x}$.

45 **a.** Sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, $\dfrac{-x^{2}-1}{(x^{2}-1)^{2}}\, e^{\frac{x}{x^{2}-1}}$;

b. Sur $\mathbb{R}$, $e^{x^{2}+1}(4x^{2}-2x+1)$.

46 **a.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$e^{3x}+1>1>0$, on a $f(x) = \dfrac{2e^{3x}}{(e^{3x}+1)^{2}}$.

b. La fonction f est dérivable là où tan l'est.

Sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi / kZ\right\}$ on a $f'(x) = \dfrac{e^{\tan x}}{\cos^{2} x}$.

48 La fonction $x \mapsto e^x$ est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]0\,;+\infty[$, or $\frac{3}{2} \in]0\,;+\infty[$, donc l'équation $e^x = \frac{3}{2}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. En la notant α.

$$0{,}40 < \alpha < 0{,}41 .$$

Bien évidemment, entre nous, $\alpha = \ln\frac{3}{2} = \ln 3 - \ln 2$!!!

49 **1.** La fonction f est somme de fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$ et $f(0) = 2 + 1 - 3 = 0$. De plus :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -3 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty .$$

D'où le tableau de l'énoncé.

2. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donnée par $y = 5x$.

3. L'équation $4X^2 + X - 5 = 0$ admet pour solutions 1 et $-\frac{5}{4}$.

Donc l'équation $4e^{2x} + e^x - 5 = 0$ équivaut à :

$$\begin{cases} 4X^2 + X - 5 = 0 \\ X = e^x \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} X = 1 \text{ ou } X = -\frac{5}{4} \\ X = e^x \end{cases}$$

Soit $x = 0$ l'unique solution.

4. On forme $\Delta(x) = f(x) - 5x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
$\Delta(x) = 2e^{2x} + e^x - 3 - 5x$, donc $\Delta'(x) = 4e^{2x} + e^{2x} - 5$.
Des racines de l'équation précédente on déduit le signe de cette expression dont la fonction associée est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\Delta'(x)$	2	0	1

d'où

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\Delta(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\Delta(x) \geqslant 0$.
On en déduit que la tangente est en dessous de $\mathscr{C}_f$, sauf en $O(0\ ;0)$ où elle est tangente.

50 **1.** $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = +\infty$ . . .

2.

x		0	
f	$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

3. Une équation de cette tangente est justement $y = x + 1$, d'où l'inégalité cherchée en **4**.

51 En fait, il s'agit de la fonction $x \mapsto 2\text{sh}(x)$ …
Donc, rien à ajouter !

52 **1.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \dfrac{1}{e^x + 1}$, car $e^x + 1 > 1$.

2. D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

3. f est la composée de fonctions monotones…

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f	$0 \nearrow 1$

d'où deux asymptotes horizontales…

4. On peut remarquer que $\left(0\ ;\ \dfrac{1}{2}\right)$ est centre de symétrie. Il suffit de calculer

pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) + f(x)$ … on trouve 1 !!

Sinon, $f'(0) = \dfrac{1}{4}$ d'où le résultat.

53 **1.** f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, donc l'affirmation est fausse.

2. Pour $x \neq 0$, $f(-x) = \dfrac{-2e^x}{e^x - 1}$: Vrai.

3. FAUX. Il y a aussi la droite d'équation $y = -2$.

4. Pour tout $x \neq 0$, $f(-x) + f(x) = -2$, donc l'affirmation est vraie.

5. Sur $\mathbb{R}^*$, $f'(x) = \dfrac{-2e^x}{(e^x - 1)^2}$, donc l'affirmation est fausse.

6. FAUX. Elle est strictement décroissante sur chacun des intervalles : $]-\infty\ ;\ 0[$ et $]0\ ;\ +\infty[$.

55 **a.** $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e \times \dfrac{x^2}{e^x}$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, et

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et donc il y a asymptote horizontale de l'équation $y = 0$.

b. $f'(x) = e^{1-x}(-x^2 + 2x)$ dont le signe est celui de $-x^2 + 2x$ et donc :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0