CONTROLE DE MATHS N°3 15 MN. 30/09/10

1- a) Pour tout réel $x > 0$,

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \quad \text{d'où}$$

$$x^4+1 \leq \cos x + x^4 + 2 \leq x^4+3$$

$$\frac{1}{x^4+3} \leq \frac{1}{\cos x + x^4+2} \leq \frac{1}{x^4+1}$$

Comme $x^5+3x^2+1 > 0$ alors

1

$$f(x) \geq \frac{x^5+3x^2+1}{x^4+3}.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^5+3x^2+1}{x^4+3} = \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc d'après le théorème sur les comparaisons de limite, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4+3x^2+1}{x^2-x+2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} 5x^2 = +\infty$

1

$\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ donc d'après le théorème de composition des limites $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty}$.

c) $h(x) = \dfrac{9x^2-(9x^2+1)}{3x+\sqrt{9x^2+1}} = \dfrac{-1}{3x+\sqrt{9x^2+1}}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} 3x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} 9x^2+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

1

donc la composition des limites donne $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{9x^2+1} = +\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} 3x + \sqrt{9x^2+1} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0}$

2) a) $\mathcal{D}f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ (0,5)

b) $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} x - 2 = 0^+$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x-2} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2} 5x = 10$. D'où

(1)

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty}$$

. On montre de la même manière que

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty}$$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - 5x] = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - 5x] = 0$

(0,5)

donc la droite d'équation $y = 5x$ est asymptote oblique à la courbe au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.