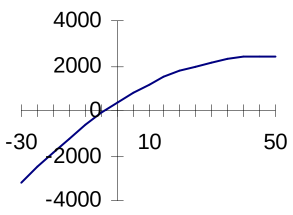
LIMITES

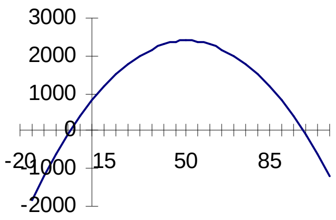
I Limites en l'infini

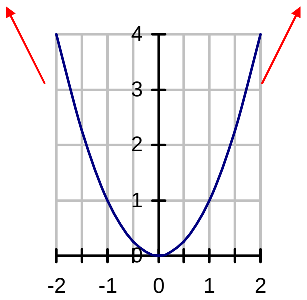
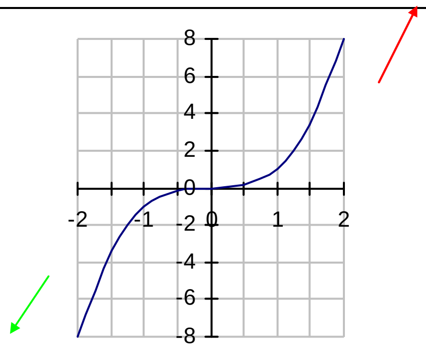
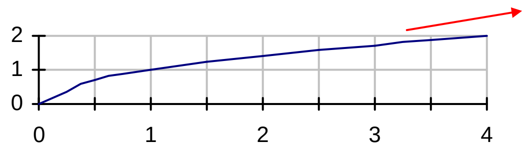
1°) Limites infinies en l'infini

Ce qui se passe en $+\infty$ c'est ce qui se passe pour les très grandes valeurs de x .Comment se « représenter » $+\infty$: avec la calculatrice on pourra remplacer x par 1000 soit 10^3 (ou plus) pour avoir une idée de ce qui se passe en $+\infty$. De même on prendra -1000 pour $-\infty$ .Sur un graphique on peut symboliser l'infini par le point de l'axe (Ox) qui est le plus à droite en gardant cependant à l'esprit que l'échelle a une part importante dans la lecture du résultat . Il faut donc rester vigilant !

Exemple :





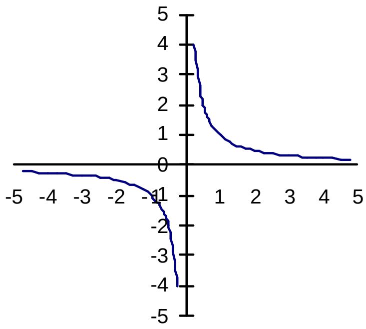
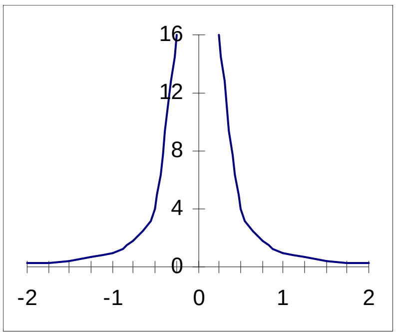
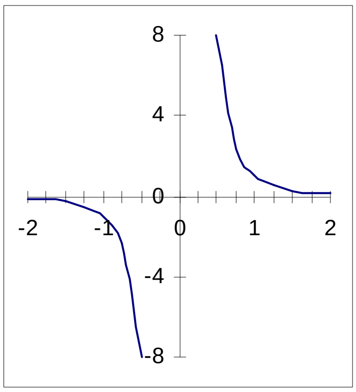
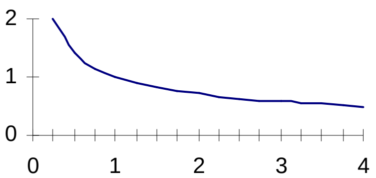
Fonction	Courbe	Limites
CARREE		$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
CUBE		$\lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
RACINE CARREE		$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ **Remarque** : La fonction racine carrée étant définie sur$[0 ; +\infty[$ pas de limite en $-\infty$

b) Généralisation

$\lim_{x \to +\infty} x^{\text{PAIRE}} = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} x^{\text{PAIRE}} = +\infty$	$\lim_{x \to +\infty} x^{\text{IMPAIRE}} = +\infty$ $\lim_{x \to -\infty} x^{\text{IMPAIRE}} = -\infty$

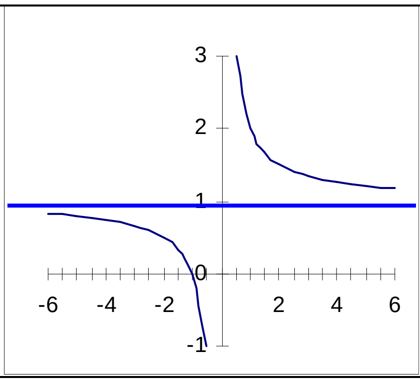
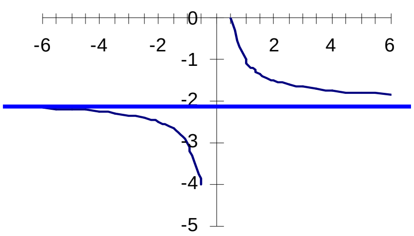
2°) Limites finies en l'infini. Asymptotes horizontales

a) Fonctions usuelles

Fonction	Courbe	Limites et asymptotes
INVERSE		$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0}$ **<u>Interprétation graphique</u>** L'axe des abscisses d'équation **y = 0** est **asymptote horizontale** à la courbe au voisinage de + ∞ et - ∞.
Fonction $x \to \frac{1}{x^2}$	 **<u>Observation</u>** : au voisinage de + ∞ et de - ∞ la courbe se rapproche indéfiniment de l'axe (O*x*).	$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0}$ **<u>Interprétation graphique</u>** L'axe des abscisses d'équation **y = 0** est **asymptote horizontale** à la courbe au voisinage de + ∞ et - ∞.
Fonction $x \to \frac{1}{x^3}$		$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0}$ **<u>Interprétation graphique</u>** L'axe des abscisses d'équation **y = 0** est **asymptote horizontale** à la courbe au voisinage de + ∞ et - ∞.
Fonction $x \to \frac{1}{\sqrt{x}}$		$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0}$ **<u>Interprétation graphique</u>** L'axe des abscisses d'équation **y = 0** est **asymptote horizontale** à la courbe au voisinage de + ∞ et - ∞.

b) Autres fonctions. Généralisation

Remarque : On verra plus loin à l'aide du tableau sur les opérations et les limites , comment déterminer la limite d'une somme ou d'un produit. On se contente ici d'une simple observation graphique et à l'aide de la calculatrice.

Fonction	Courbe	Limites	Interprétation graphique
Exemple 1 $\mathbf{f(x)= 1 + \frac{1}{x}}$		$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathbf{1}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \mathbf{1}$	**La droite d'équation y = 1 est asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de** $+\infty$ et $-\infty$
Exemple 2 $\mathbf{g(x)=- 2 + \frac{1}{x}}$		$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathbf{-2}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \mathbf{-2}$	**La droite d'équation y = -2 est asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de** $+\infty$ et $-\infty$

Généralisation Soit a un réel donné

Limites	Interprétation graphique
Si par exemple $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathbf{a}$ Ou /et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \mathbf{a}$ Alors	**La droite d'équation y = a est asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de** $+\infty$ et $-\infty$

Exemple : Déterminer la limite en $+\infty$ et $-\infty$ de la fonction f définie sur R\{ 2} $f(x) = -4 + \frac{2}{x^2}$

Que peut - on en déduire pour la courbe C de f.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \mathbf{-4}$ **La droite d'équation y = -4 est AS.H au vois. de** $+\infty$ et $-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \mathbf{-4}$

2°) Limites en un point a . Asymptotes verticales

a)Cas où a est un élément de l'ensemble de définition

Si f est une fonction usuelle, polynôme ou rationnelle avec $a \in D_f$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)= f(a)$

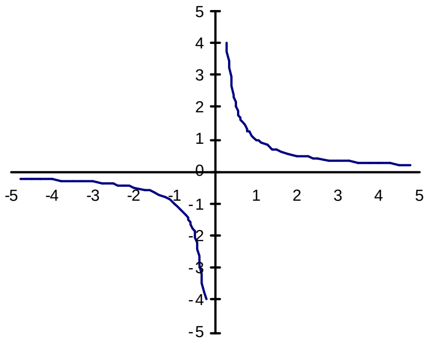
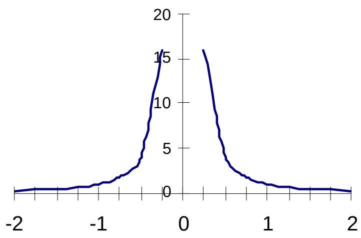
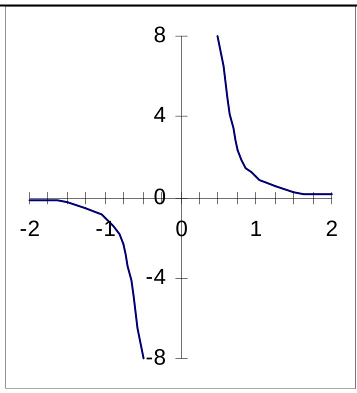
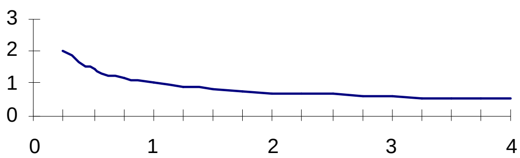
Exemple :

$\lim\limits_{x\to 0} (x^2 + x + 2) = 2$ $\qquad \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{1+2x}{3x-1} = 4$

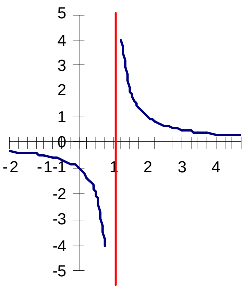
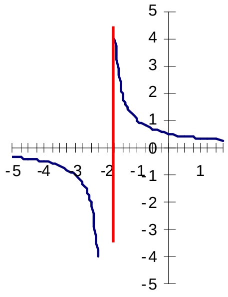
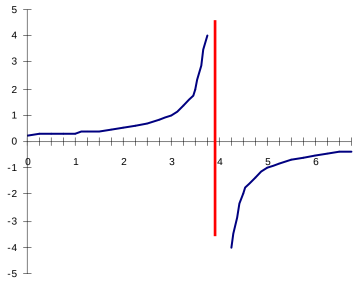
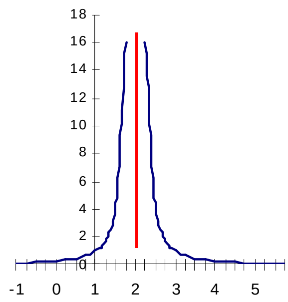
b)Cas où a n'apartient pas à D_f

Lorsque l'on x est près de 0 en restant positif (on dit aussi que x tend vers 0^+) on pourra remplacer x par 0.001 .De même quand x tend vers 0^- on remplacera x par - 0.001 par exemple.

Fonctions usuelles

Fonction	Courbe	Limites et asymptotes
INVERSE $x \to \dfrac{1}{x}$		$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x} = -\infty$ **Interprétation graphique** L'axe des ordonnées d'équation **$x = 0$** est **asymptote verticale** à la courbe .
Fonction $x \to \dfrac{1}{x^2}$		$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$ **Interprétation graphique** L'axe des ordonnées d'équation **$x = 0$** est **asymptote verticale** à la courbe .
Fonction $x \to \dfrac{1}{x^3}$		$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^3} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^3} = -\infty$ **Interprétation graphique** L'axe des ordonnées d'équation **$x = 0$** est **asymptote verticale** à la courbe .
Fonction $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$		$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ **Interprétation graphique** L'axe des ordonnées d'équation **$x = 0$** est **asymptote verticale** à la courbe .

Autres fonctions

			
Exemple 1 $\mathbf{f(x)=\dfrac{1}{x-1}}$	**Exemple 2** $\mathbf{g(x)=\dfrac{1}{x+2}}$	**Exemple 3** $\mathbf{h(x)=\dfrac{1}{4-x}}$	**Exemple 4** $\mathbf{p(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}}$
$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{1}{x-1} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \dfrac{1}{x+2} = +\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \dfrac{1}{x+2} = -\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} \dfrac{1}{4-x} = -\infty$ $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x<4}} \dfrac{1}{4-x} = +\infty$	$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$
Remarque : $\begin{array}{c\|ccc} x & & 1 & \\ \hline x-1 & - & 0 & + \end{array}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \dfrac{1}{x-1} = +\infty \left(\dfrac{1}{0^+}\right)$	**Remarque :** $\begin{array}{c\|ccc} x & & -2 & \\ \hline x+2 & - & 0 & + \end{array}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \dfrac{1}{x+2} = +\infty \left(\dfrac{1}{0^+}\right)$	**Remarque :** $\begin{array}{c\|ccc} x & & 1 & \\ \hline 4-x & + & 0 & - \end{array}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} \dfrac{1}{4-x} = -\infty \left(\dfrac{1}{0^-}\right)$	**Remarque :** $\begin{array}{c\|ccc} x & & 1 & \\ \hline (x-2)^2 & - & 0 & + \end{array}$ donc $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty \left(\dfrac{1}{0^+}\right)$
Interprétation graphique	Interprétation graphique	Interprétation graphique	Interprétation graphique
La droite d'équation **$x = 1$** **est** **asymptote verticale** **à la courbe de f**	**La droite d'équation** **$x = -2$** **est** **asymptote verticale** **à la courbe de f**	**La droite d'équation** **$x = 4$** **est** **asymptote verticale** **à la courbe de f**	**La droite d'équation** **$x = 2$** **est** **asymptote verticale** **à la courbe de f**

Généralisation Soit b un réel donné

Limites

Si par ex

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x>b}} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty\text{)}$$

ou / et

$$\lim_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = -\infty \text{ (ou } +\infty\text{)}$$

Interprétation graphique

La droite d'équation

$x = b$

est

asymptote verticale

à la courbe de f

III) Opérations et limites

1°) Somme

lim f	**lim g**	**lim f + g**
l	l'	l+l'
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	**$-\infty$**	**?**

2°)Produit

lim f	**lim g**	**lim f $\times$ g**
l	l'	l$\times$l'
l>0	$+\infty$	$+\infty$
l>0	$-\infty$	$-\infty$
l<0	$+\infty$	$-\infty$
l<0	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0	**$-\infty$**	**?**
0	**$+\infty$**	**?**

IV) Exemples de calculs de limites

1°) Exemples de calculs de limites de fonction polynômes ; de fonction rationnelles, asymptotes obliques

a)Limites de fonctions polynômes en l'infini

La limite d'une fonction polynôme en **l'infini**
est la limite du terme de plus haut degré

Exemple

$f(x) = -3x^2 + 4x + 1 =$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -3x^2 = -\infty$$

De même on montre que $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty}$

b) Limites de fonctions rationnelles en l'infini

Pour chercher la limite d'une fonction rationnelle en **l'infini** **on garde :**

1 .Au numérateur : le terme dont la puissance de *x* est la plus élevée et ...

2 . Au dénominateur : le terme dont la puissance de *x* est la plus élevée et ...

3. On simplifie puis on calcule la limite de l'écriture obtenue .

Exemple 1 :d°N<d°D

Soit f la fonction définie sur R par $f(x)=\dfrac{-2x+5}{x^2+3}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+5}{x^2+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2}{x}=0 \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

De même on montre que $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=0}$

Remarque : **l'interprétation graphique de cette limite** est que la courbe de f admet l'axe des abscisses d'équation y=0 comme asymptote horizontale.

Exemple 2: d°N=d°D

$$f(x)=\frac{x^2+3}{2x^2-3x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{2x^2-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=½$$

De même on montre que $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=½}$

Remarque : **l'interprétation graphique de cette limite** est que la courbe de f admet l'axe des abscisses d'équation y=½ comme asymptote horizontale

Exemple 3: d°N>d°D

$$f(x)=\frac{x^3+5x^2+1}{2x^2-3x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+5x^2+1}{2x^2-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2x^2}=\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$$

De même on montre que $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty}$

c) Asymptotes obliques

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type]m ; + ∞ [(ou] - ∞ ; m[ ) .

> Si $\lim\limits_{x\to+\infty} [\, f(x) - (ax + b)\,] = 0$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} [\, f(x) - (ax + b)\,] = 0$)
>
> alors la droite d'équation **$y = ax + b$** est **asymptote oblique** à la courbe au voisinage de + ∞ (ou de - ∞).

Remarque : de telles fonctions pourront s'écrire $f(x) = \mathbf{ax + b} + \dfrac{c}{p(x)}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{c}{p(x)} = 0$

Exemple

Soit f la fonction définie sur R\{1} par $f(x) = \dfrac{3x^2 + x + 4}{x - 1}$.

1°) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$ pour tout x de D_f .

$$f(x) = \frac{(ax + b)(x - 1) + c}{x - 1} = \frac{ax^2 + (b - a)x + c - b}{x - 1}$$

par identification on obtient $\begin{cases} a = 3 \\ b - a = 1 \\ c - b = 4 \end{cases}$ on trouve a = 3 ; b= 4 ; c = 8 $f(x) = \mathbf{3x + 4} + \dfrac{8}{x - 1}$

2°) Montrer que la courbe C de f admet une asymptote oblique D que l'on déterminera

$$\lim_{x\to+\infty} [\, f(x) - (3x + 4)\,] = \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{x - 1} = 0$$

de même $\lim\limits_{x\to-\infty} [\, f(x) - (3x + 4)\,] = 0$

la droite D d'équation **$y = 3x + 4$** est **asymptote oblique** à la courbe C au voisinage de + ∞ (ou de - ∞).

> **POSITION RELATIVE**
>
> Pour étudier la position relative d'une courbe et de son asymptote oblique il suffit d'étudier
>
> le SIGNE de $f(x) - (ax + b)$ puis on interprète graphiquement le résultat obtenu.

Dans notre exemple posons $h(x) = 8/(x - 1)$ alors on a

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h(x)$	-	‖	+
Position Relative de C et D	C est en dessous de D	‖	C est au dessus de D

d) Limite d'une fonction rationnelle en un point qui ANNULE Le DENOMINATEUR

Exemple

Soit f la fonction définie sur]1, +∞ [par $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{x-1}$.

On cherche le signe de $x - 1$ sur]1 ; +∞ [

x	1	$+\infty$
$x-1$	0	+

Donc

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} 3x^2+1 = 4 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} x-1 = 0^+\end{array}\right\}$$

donc par quotient $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$.

Remarque : graphiquement la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe.

d) Limite d'une fonction rationnelle en un point qui ANNULE Le DENOMINATEUR ET LE NUMERATEUR

Exemple

Soit f la fonction définie sur]1, +∞ [par $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}=x+2$

Dans ce cas on simplifie
Par le facteur commun
Du numérateur et du
dénominateur

Donc

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$

2°) Exemples de calculs de limites de fonctions où figurent une fonction logarithme ou exponentielle avec une puissance de *x* .

a) Avec une fonction logarithme en l'infini

Si on est vers l'infini généralement on factorise par la puissance de x car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Exemple : $f(x) = 4x^2 + x - \ln x$

$$f(x) = x^2\left(\frac{4x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}\right)$$

On met au dénominateur la puissance de *x* la plus élevée ici x^2

$$f(x) = x^2\left(4+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln x}{x^2}\right)$$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

b) Avec une fonction logarithme en zéro

Exemple : $f(x) = (x^2 + x)\ln x$ ici il faut développer sinon on a une indéterminée ∞x0 et on utilise $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$

c) Avec une fonction exponentielle

Exemple 1 : $f(x) = 2x\,e^{-x} + x = \dfrac{2x}{e^x} + x$ comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x/x = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} x/e^x = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Exemple 2: $f(x) = \dfrac{e^x + x + 1}{e^{2x}+1} = \dfrac{e^x(1 + x/e^x + 1/e^x)}{e^{2x}(1 + 1/e^{2x})} = \dfrac{1 + x/e^x + 1/e^x}{e^x(1 + 1/e^{2x})}$

d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

3°) Limites et composée de deux fonctions

Proposition Soit $f(x) = v(u(x))$

Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \mathbf{b}$ et si $\lim\limits_{X\to b} \mathbf{v(X) = c}$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$

a,b,c représentent trois réels ou +∞ ou - ∞ .

Exemple :soit f la fonction définie sur R par $f(x)= \ln(x^2 + x + 1)$ Déterminer la limite de f en + ∞.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + x + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$