Exercice 30 p 35

a)

$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{(9x^2-2x)}+3x = \lim_{x\to-\infty} \frac{9x^2-2x-9x^2}{\sqrt{(9x^2-2x)}+3x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{\sqrt{(9x^2-2x)}-3x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{-(\sqrt{(9-2/x)}+3)} = 1/3$$

Si $x<0$ puisque $x\to-\infty$

$\sqrt{(9x^2-2x)} = \sqrt{[x^2(9-2/x)]} = \sqrt{x^2}\sqrt{(9-2/x)} = |x|\sqrt{(9-2/x)} = -x\sqrt{(9-2/x)}$

b)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{(x^2-4x+1)}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2-1/x}{-\sqrt{(1-4/x+1/x^2)}} = -2$$

c)

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{(x^2-4)}-2x = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2-4}{\sqrt{(x^2-4)}+2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x-4/x}{(\sqrt{(1-4/x^2)}+2)} = -\infty$$

d)

$$\lim_{x\to+\infty} x-\sqrt{(x^2+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x+\sqrt{(x^2+1)}} = 0$$

Ex 37

$$\ast\ f(x) - (x+5) = \sqrt{x^2-6x+1} + x - 3 = \frac{x^2-6x+1-x^2+6x-9}{\sqrt{x^2-6x+1} - x + 3}$$

$$f(x) - (x+5) = \frac{-8}{\sqrt{x^2-6x+1} - x + 3} = \frac{-8}{-x\left[\sqrt{1-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}} + 1 - \frac{3}{x}\right]}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (x+5)\right] = 0 \quad \text{ASO} : y = x + 5 \text{ au } V(-\infty)$$

$$\ast\ f(x) - (3x-1) = \sqrt{x^2-6x+1} - x + 3 = \sqrt{x^2-6x+1} - (x-3)$$

$$f(x) - (3x-1) = \frac{x^2-6x+1-x^2+6x-9}{\sqrt{x^2-6x+1} + x - 3}$$

$$f(x) - (3x-1) = \frac{-8}{\sqrt{x^2-6x+1} + x - 3}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (3x-1)\right] = 0 \quad \text{ASO} : y = 3x - 1 \text{ au Voisinage de } +\infty.$$

Ex 41

$$\lim_{\substack{x \to -6 \\ x > -6}} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to -3} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 3 \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

$$\lim_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} f(x) = -\infty$$

Ex 43 -

a - $$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} \frac{2x^2-5x-3}{-x^2+x+6} = \lim_{x \to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(2x+1)}{\cancel{(x-3)}(-x-2)} = \frac{-7}{5}$$

b - $$\lim_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} \frac{3x-21}{3-x} = -\infty \quad \text{car} \begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} 3x - 21 = -12 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} 3 - x = 0^+ \end{cases}$$

c - $$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} 3 - 5x = -2 \\ &\lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} -x^2 - x + 2 = 0^- \end{aligned}\right\} \text{d'où } \lim_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} \frac{3-5x}{-x^2-x+2} = +\infty$$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$-x^2-x+2$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Rq} : x^3 + 8 = (x+2)(x^2-2x+4) \\ &\quad (x^3 + (2)^3) \\ &\text{et } x^2 - 2x + 4 > 0 \ ! \end{aligned}}$$

d. $$\left.\begin{aligned} &\lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} 4x^2 + x + 1 = 15 \\ &\lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} x^3 + 8 = 0^+ \end{aligned}\right\} \text{donc } \boxed{\lim_{\substack{x \to -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty}$$

On montre de même que $\boxed{\lim\limits_{x \to -2} f(x) = -\infty}$

44 – a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-x+\sqrt{2x}}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x - x^2}{(x-2)(+x+\sqrt{2x})}$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-x+\sqrt{2x}}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x(2-x)}{(x+\sqrt{2x})(x-2)}$

$\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-x+\sqrt{2x}}{x-2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{-x}{x+\sqrt{2x}} = -\dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} b(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x-x^2} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1+x-1}{(x-x^2)(\sqrt{1+x}+1)}$

$\lim\limits_{x \to 0} b(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x(1-x)(\sqrt{1+x}+1)} = \dfrac{\ }{2}$

45 a) $\dfrac{\sin x}{\tan x} = \dfrac{\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \cos x$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{\tan x} = 1$

b. $\sin 6x = 2 \sin 3x \cos 3x$

donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 6x}{\sin 3x} = \lim\limits_{x \to 0} 2\cos 3x = 2$

c. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\tan x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} \times \dfrac{\cos x}{\sin x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\tan x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \sin x \cdot \cos^2 x}{\cos 2x \, \sin x}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\tan x} = 2$

47 • $\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} f(x) = -\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{3} \\ x < \frac{\pi}{3}}} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{3} \\ x > \frac{\pi}{3}}} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 9\pi \\ x < 9\pi}} g(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 9\pi \\ x > 9\pi}} g(x) = -\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} h(x) = +\infty$;

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x < 3}} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} h(x) = -\infty$.

• $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} i(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} i(x) = +\infty$.

54 1. On utilise l'expression conjuguée du numérateur : $\sqrt{x+2}+\sqrt{x}$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x+2}+\sqrt{x}) = +\infty$, d'où le résultat.

3. Pour $x \geqslant 0$: $\sqrt{x+2}+\sqrt{x} \geqslant \sqrt{x}+\sqrt{x} > 0$

soit $\sqrt{x+2}+\sqrt{x} \geqslant 2\sqrt{x} > 0$, d'où :

$$0 < f(x) < \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

Donc on a encore la limite par théorème de comparaison.

55 Pour tout x réel : $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$, d'où :

$$x^2-1 \leqslant f(x) \leqslant x^2+1.$$

- $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2-1) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2+1) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

56 1. Là encore, $x-1 \leqslant x+\sin x \leqslant x+1$.

Donc pour tout $x > 0$; $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{x-1}$

avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$,

d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. d'après le th des gendarmes

2. On remet ça : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2}{5} \leqslant \frac{x^2}{3+2\sin x} \leqslant x^2$.

En particulier $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{5}\right) = +\infty$, donc : d'après le th de comparaison

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2}{3+2\sin x}\right) = +\infty.$$

57 $\forall x \in \mathbb{R}$, $-2x^2+\sin x$ peut s'encadrer par :

$$-2x^2-1 \leqslant -2x^2+\sin x \leqslant -2x^2+1$$

et vu que $x^2+1 > 0$ sur $\mathbb{R}$:

$$\frac{-2x^2-1}{x^2+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{-2x^2+1}{x^2+1}$$

avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-2x^2-1}{x^2+1}\right) = -2 = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{-2x^2+1}{x^2+2}\right)$.

Donc c'est le théorème des gendarmes qui permet de conclure ici.

58 Soit $x \neq 0$.

1. $g(x) = \frac{x}{3} - \frac{1}{x^2}\,\frac{\sin(3x)}{(3x)}$.

On a $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$.

2. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^4-1}{3x^3}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^4-1}{3x^3}\right) = +\infty$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^4+1}{3x^3}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^4+1}{3x^3}\right) = +\infty$.

3. • Sur $]-\infty ; -1]$: $\frac{x^4+1}{3x^3} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^4-1}{3x^3}$.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{x^4-1}{3x^3}\right) = -\infty$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

• Sur $[1 ; +\infty[$: $\frac{x^4-1}{3x^3} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^4+1}{3x^3}$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^4-1}{3x^3}\right) = +\infty$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Finalement $f(x) - \frac{x}{3} = -\frac{\sin 3x}{3x^3}$, donc :

$0 \leqslant \left| f(x) - \frac{x}{3} \right| \leqslant \frac{1}{x^3}$, sur $]0 ; +\infty[$ et $\left(y = \frac{x}{3}\right)$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$.

Raisonnement analogue sur $]-\infty ; 0[$.