IV) Lois de probabilité continues

1°) Lois à densité

Définition

Si la variable aléatoire X peut prendre toute valeur de l'intervalle I, on dit que cette variable aléatoire est une **variable aléatoire continue** sur cet intervalle.

Définition 1

Soit I = [a ; b] un intervalle borné de R avec a<b.

Si f est une fonction continue et positive sur I telle que $\displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx = 1$ alors f est une densité de probabilité

Définition 1 bis

On peut alors définir une loi de probabilité sur I admettant f comme densité de probabilité et pour tout réel c et d
Dans I avec c ≤ d on a :

$$P(c \leq X \leq d) = \int_{c}^{d} f(x)\,dx = P(c < X \leq d) = P(c \leq X < d) = P(c < X < d)$$

On peut écrire aussi :

$$P([c\,;d]) = \int_{c}^{d} f(x)\,dx = P(]c\,;d]) = P([c\,;d[) = P(]c\,;d[)$$

Définition 2

Soit I = [a ; +∞[un intervalle de R. Si f est une fonction continue et positive sur I telle que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_{a}^{x} f(t)\,dt = 1$$

alors f est aussi une densité de probabilité

Définition 2 bis

On peut alors définir une loi de probabilité sur I admettant f comme densité de probabilité et pour tout réel c et d
Dans I avec c≤d on a :

$$P([c\,;d]) = \int_{c}^{d} f(x)\,dx = P(]c\,;d]) = P([c\,;d[) = P(]c\,;d[)$$

Et pour tout c≥a

$$P([c\,;+\infty[) = 1 - \int_{c}^{d} f(x)\,dx = 1 - P([a\,;c[) = P(]c\,;+\infty[)$$

Remarque importante : pour tout réel d dans I

$$P(\{ d \}) = \int_{d}^{d} f(x)\,dx = 0$$

Exemple : ex 7 p 272

$$\int_{1}^{2} k/x \; dx = k\ln 2 = 1 \text{ donc } k=1/\ln 2$$

$P(X \leq 3/2) = \ln 3/\ln 2 - 1$ $P(X \geq ½) = 1$ $P(X \geq 4/3) = \ln 3/\ln 2 - 1$
$P(4/3 < X \leq 3/2) = 2\ln 3/\ln 2 - 3$.

2°) Un exemple fondamental : la Loi uniforme sur [0 ;1]

Définition 3

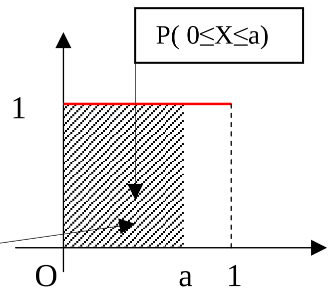
On dit que la variable aléatoire X suit la loi uniforme continue sur [0 ;1] si **sa densité de probabilité est la fonction constante** sur [0 ; 1] définie par f(x) = 1 et on a

$P([0 ; 1]) = 1$
$P([a ; b]) = b - a$ pour tout a, b dans [0 ;1]

Remarque : Dans le livre p 258 on donne une loi uniforme sur un intervalle [a ;b].

Propriétés

Pour tout réel a de [0 ;1]



1. $P(X=a) = P(\{a\}) = 0$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. $P([0 ; a]) = P(0 \leq X \leq a) = a$

C'est l'aire d'un rectangle de côtés a et 1

4. $P(I \cup J) = P(I) + P(J)$ si $I \cap J = \varnothing$
5. P(I) = 1 - P(I)

Exemples: 1. Un autobus passe toutes les heures à un arrêt donné. Une personne, ne connaissant pas les horaires de Passage se présente à l'arrêt : son temps d'attente est une VA T qui suit la loi uniforme sur [0 ; 1].
Calculer la probabilité qu'elle attende moins de 15 mn.
P(« elle attend exactement 15 mn ») =P(T = 0,25) = 0
$P(0 \leq T < 0{,}25) = 0{,}25$
2. On choisit un nombre x au hasard dans [0 ;1] . La probabilité que x soit dans l'intervalle [0,26 ; 0,77[est donc égale à 0,77 – 0,26 = 0,51.
3. La probabilité que x soit dans l'intervalle [0,17 ; 0,52 [U] 0, 23 ; 0, 87] est égale à la probabilité que x soit dans [0,17 ; 0, 87] soit 0,87 – 0,17 = 0,7.

3°) Loi exponentielle ou Loi de durée de vie sans vieillissement

Remarque : Cette loi s'applique au fonctionnement de certains appareils électroniques ou encore à la désintégration de noyaux radioactifs.
Soit T une variable aléatoire continue mesurant la durée de vie d'un individu.
On dit que T suit une loi de durée de vie sans vieillissement si la probabilité que l'individu soit en vie à l'instant t + h (avec h≥0) sachant qu'il est en vie à l'instant t, ne dépend pas de t.

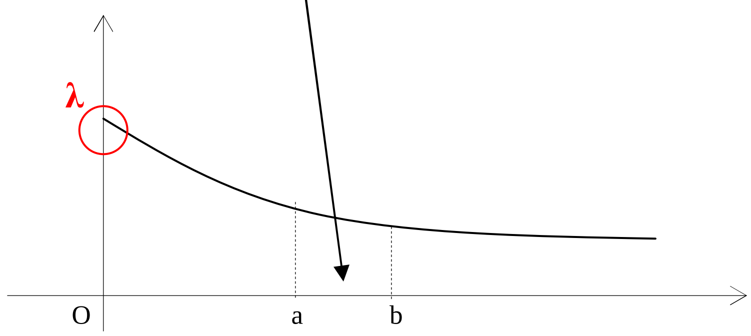
Définition : Loi exponentielle de paramètre λ > 0

On dit que la variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité de probabilité est la fonction f sur $[0\,;+\infty[$ définie par $f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$

et on a si x dans $[0\,;+\infty[$

$$P(X \leq x) = \int_0^x f(t)\,dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt$$



Probabilité conditionnelle

Soit P une loi de probabilité sur un intervalle I, K et J deux intervalles inclus dans I avec P(K) non nulle.

La probabilité conditionnelle de J sachant K est définie par $P_K(J) = \dfrac{P(K \cap J)}{P(K)}$.

Propriété

Pour tout réel positifs x et a on a

$P_{X \geq a}(X \geq x + a) = P(X \geq x)$.

Preuve : p264

Exemples:

1. La durée de vie (exprimée en heures) d'un certain type d'ampoules électriques est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,002.

a. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité pour qu'une ampoule du même type ait une défaillance avant 500 heures

b. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité pour qu'une ampoule du même type n'ait pas de défaillance avant 100 heures

c. Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité pour qu'une ampoule du même type fonctionne encore au bout de 600 heures sachant qu'elle fonctionne au bout de 500 heures. Que remarque t – on ?

2. La variable aléatoire X égale à la durée de vie d'un atome d'iode 131 avant désintégration suit une loi exponentielle. On sait que la probabilité que cette durée de vie soit inférieure à 2 jours est à 10^{-3} près égale à 0,160.

a. Calculer, à 10^{-3} près le paramètre de cette loi exponentielle.

b. Calculer les probabilités des événements (X = 7) et (6 < X < 10) .

c. La demi – vie d'un nuclide est le temps T au bout duquel la moitié des atomes initiaux sont désintégrés. Calculer à 0,1 près la demi – vie de l'iode 131.

d. Justifier par un calcul la loi de désintégration radioactive : « la probabilité pour qu'un atome radioactif se transforme durant un intervalle de temps Δt (petit) est approximativement $\lambda \Delta t$ ». (On utilisera le fait que $e^u - 1 \approx u$ pour u voisin de 0)

CORRIGE

1. a. $P (T < 500) = 1 - e^{-500 \times 0,002} = 1 - e^{-1} \approx 0,632$

b. $P(T \geq 100) = 1 - P (T<100) = 1 - (1 - e^{-100 \times 0,002}) = e^{-0,2} \approx 0,819$

c. $P_{T \geq 500}(T \geq 100 + 500) = P(T\geq 100) = e^{-0,2}$ (même résultat qu'au b. loi sans vieillissement de la loi exponentielle)

2. a. On résout l'équation : $P(X<2) = 0,160$, soit : $1 - e^{-2\lambda} = 0,160$ d'où l'on déduit $\lambda = -\ln 0,84/2 \approx 0,087$.

b. $P(X = 7) = 0$. $P(6 < X < 10) = F(10) - F (6) \approx 0,174$ où $F(t) = 1 - e^{-0,087t}$.

c. $P(X<T) = 0,5$ d'où $T \approx 8$. La demi – vie de l'iode est de 8 jours environ.

d. On cherche $P_{X \geq t}(X \leq t + \Delta t) = P(t \leq X \leq t + \Delta t)/ P(X \geq t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda \Delta t$ pour Δt petit, on en déduit que la probabilité cherchée est approximativement égale à $\lambda \Delta t$.