POLYNOMES.

1°) Exemples

$P(x)=3x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x + 1$ est un polynôme de degré 4.
$G(x)= - 4x^2 + x + 1$ est un polynôme de degré 2.
$H(x)= 2x^3$ est un monôme de degré 3.

2°) Factorisation par (x - a) avec a réel.

Définition On appelle racine (ou zéro) d'un polynôme P tout réel a vérifiant P(a)=0.

Exemples : a) $P(x)= x^3 + 4x^2 + 5x +2$ .Montrer que -2 est une racine de P.
b) Les racines de $G(x)=5(x - 1)(2x + 3)(x + 4)$ sont

Remarque : On note d°P ,le degré d'un polynôme P.

Définition2

On dit qu'un polynôme P est factorisable (ou divisible) par (x - a) s'il existe un polynôme Q tel que $P(x) = (x – a).Q(x)$. De plus d°P = d°Q + 1.

Exemple : $P(x)= (x - 2)(x^2 + x + 1)$ est factorisable par (x - 2) et $Q(x)= x^2 + x + 1$.

Théorème

P est factorisable par (x – a) si et seulement si P(a) = 0 (c'est – à – dire a est une racine de P) .

Exemple 1 : Montrer que P est factorisable par (x +1) sachant que $P(x)= x^3 + x^2 + x + 1$.
On calcule P(- 1) (en effet attention (x + 1) =(x – (-1)) et on obtient P(-1)= 0 d'où le résultat.
Exemple 2 :
1)Montrer que le polynôme P défini par $P(x)= 3x^3 + 2x^2 - x - 4$ est factorisable par (x - 1)
2)Déterminer alors le polynôme $Q(x)=ax^2 + bx + c$ tel que $P(x)=(x - 1)Q(x)$.
Corrigé :
1)$P(1) = 3(1)^3 + 2(1)^2 – 1 – 4 = 3 + 2 –1 – 4 = 0$ d'où le résultat.
2) Méthode : on écrit $P(x) = (x – 1)(ax^2 + bx +c)$ et on développe , on obtient :
$P(x) = ax^3 + (b –a)x^2 + (c – b)x – c$ en « rassemblant » les termes correspondant à la même puissance de x .
Puis on procède par identification (on utilise en fait la propriété fondamentale qui dit qu'un polynôme est nul ssi tous ses coefficients sont nuls)
En effet on sait que $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - x – 4$
Et on vient aussi d'écrire que $P(x) = ax^3 + (b –a)x^2 + (c – b)x – c$

Donc $\begin{cases} a = 3 \\ b - a = 2 \\ c - b = -1 \\ -c = -4 \end{cases}$ $\Longleftarrow$ cette ligne est une « ligne de vérification » car grâce à elle on sait si les calculs faits sur les autres lignes sont justes.

On trouve $\begin{cases} a= 3 \\ b = 5 \\ c = 4 \end{cases}$ On a finalement $P(x) = (x – 1)(3x^2 + 5x + 4)$