CORRECTION DES EXOS 127 et 128

p 126

127 **Partie A 1.** $y = x + 1$.

2. $m = p = 1$.

3. $(1\ ;\ 1)$ est centre de symétrie de la courbe.

4. $\varphi(-x) + \varphi(x) = (f(-x) + x - 1) + (f(x) - x - 1)$

$$= f(-x) + f(x) - 2 = 0 \ .$$

Il en résulte : $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, ce qui entraîne : $f'(x) = 1 + \varphi'(x)$, donc :

$$f'(-x) - f'(x) = (1 + \varphi'(-x)) - (1 + \varphi'(x)) = \varphi'(-x) - \varphi'(x) \ .$$

Or $\varphi'(x) = \varphi'(-x)$, donc $f'(-x) - f'(x) = 0$. Résultat : f' est paire.

5. • $\varphi(-x) = (-ax + b)e^{-x^2}$; • $\varphi(x) = (ax + b)e^{-x^2}$.

Donc $\varphi(-x) + \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2} \times 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0$.

Puisque $f'(0) = 1 - e$, $\varphi'(0) = 1 + \varphi'(0) = 1 - e$, par suite :

$$\varphi'(0) = -e \ .$$

On a donc : $e^{-x^2}(a - 2x \cdot b - 2x^2 \cdot a) = \varphi'(x)$ et $a = -e$.

C'est pourquoi : $\varphi(x) = (-ex)e^{-x^2} = -xe^{1-x^2}$.

Partie B On retrouve $f(x) = 1 + x - xe^{1-x^2}$.

1. On a bien $f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{1-x^2}$. On en déduit :

$$f''(x) = e^{1-x^2}(6x - 4x^3) = 2xe^{1-x^2}(3 - 2x^2) \ .$$

2.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
x			$-$		0		$+$		
$3-2x^2$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ce qui fournit les variations de f' .

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	1	$\nearrow$		$\searrow$	$1-e$	$\nearrow$		$\searrow$	1

3. L'équation $f'(x) = 0$ admet deux solutions opposées dans $\mathbb{R}$.

4.

x	$-\infty$		$-\alpha$		α		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$2-f(\alpha)$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

128 **1. a.** La limite est 0.

b. On développe $x\left(1 + \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$ et on aboutit.

2. Il s'agit d'un nombre dérivé… 1. et donc f est continue en 0.

3. a. Déjà démontré !

b. On le vérifie avec $g(x) = e^x - 1 - x$.

4. On remarque que $f(+x) - f(-x) = x$, donc :

$$\frac{f(x) - f(-x)}{x - (-x)} = \frac{1}{2} \ .$$

D'où le coefficient directeur.

Donc la droite (MM') est de pente constante.