LA FONCTION LN

I) Définition et propriétés

1°) Définition

La fonction définie sur] 0 ; + ∞[, dont la dérivée est $\frac{1}{x}$ et qui vaut 0 en 1 est la fonction logarithme népérien notée ln on a : $\ln :]0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \to \ln x$

Remarque : On définit ln aussi en disant que c'est la primitive de $\frac{1}{x}$, terme dont nous verrons le sens ultérieurement.

2°) Conséquences immédiates

- $\ln x$ est défini si x est strictement positif
- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
- $\ln 1 = 0$

II Formules fondamentales

Pour tous réels a et b strictement positifs

$$\boxed{\ln ab = \ln a + \ln b}$$

Exemples : $\ln 6 = \ln 2.3 = \ln 2 + \ln 3$; $\ln 2x = \ln 2 + \ln x$

$$\boxed{\ln \frac{1}{a} = -\ln a}$$

Exemple : $\ln \frac{1}{3} =$

$$\boxed{\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b}$$

Exemple : $\ln \frac{3}{4} =$; $\ln x - \ln (x^2 + 1) =$ avec $x \in]0 ; +\infty[$

$$\boxed{\ln a^p = p \ln a}$$ où p est un entier relatif

Exemple : $\ln 8 =$; $\ln 27 =$; $2 \ln (x + 1) =$ avec $x \in]1 ; +\infty[$

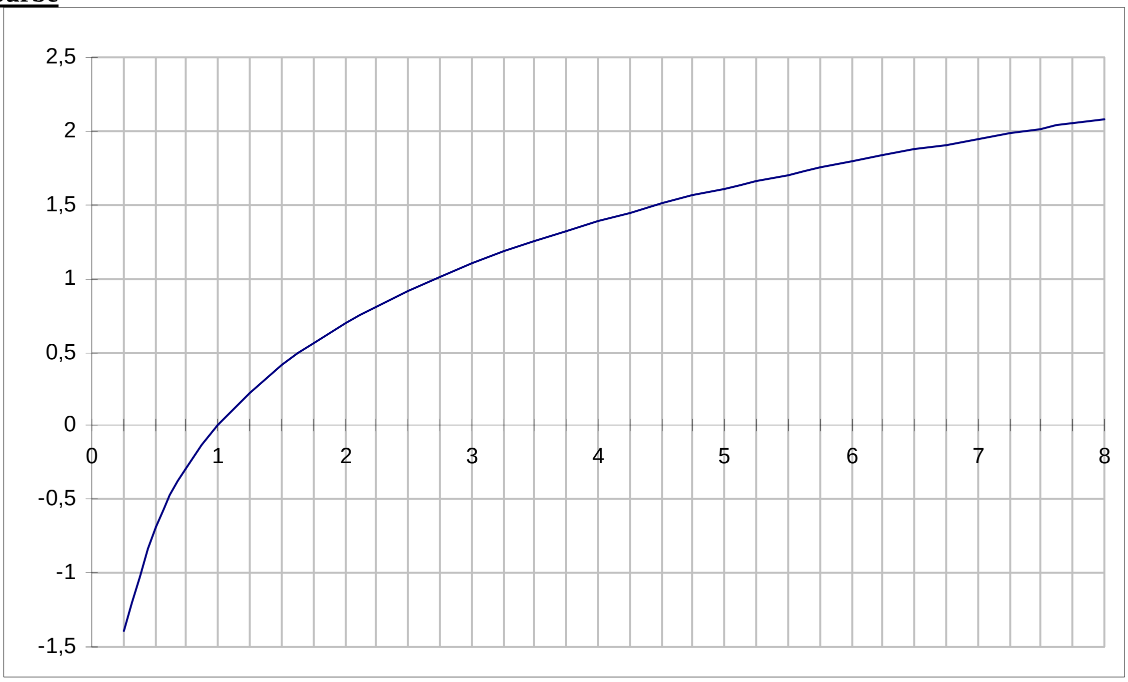
$\ln 16 =$

$$\boxed{\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a}$$

Exemples : $\ln \sqrt{3} =$; $\ln \sqrt{(x^2 + 1)} =$; $\frac{1}{2} \ln 25 =$

III) La courbe et l'étude des variations .

1°) La courbe



x	0.25	0.5	1	2	3	4	5	6	7
ln$x$									

2°) Les limites

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$$

Interprétation graphique : L'axe des ordonnées d'équation x=0 est asymptote verticale à la courbe

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

3°) Signe de la dérivée et sens de variation

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ pour tout x de] 0 ; + ∞ [donc (ln$x$)' > 0 pour tout x de] 0 ; + ∞ [et la fonction ln est strictement croissante sur] 0 ; + ∞ [.

4°) Tableau de variation

x	0		+ ∞
(ln$x$)'	‖	+	
ln$x$	‖ - ∞	↗	+ ∞

5°) Signe de ln x

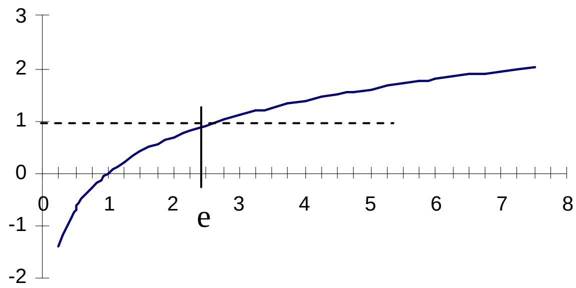
x	0		1		+ ∞
ln$x$	‖	-	0	+	

<u>IV) Applications : Le nombre e et résolution d'équations ou d'inéquations</u>

<u>1°) Le nombre e</u>

<u>Définition</u>

On appelle **<u>e l'unique réel</u>** de] 0 ; + ∞ [tel que $\mathbf{\ln e = 1}$. La calculatrice donne e ≈ 2, 718 ...



<u>Conséquences</u> : Pour tout entier relatif n , $\mathbf{\ln e^n = n}$.

<u>Exemple</u> : $\ln e^2 = 2$; $3 = \ln e^3$; $\ln e^{-5} = -5$

<u>2°) Equations . Inéquations</u>

<u>a) Equations</u> Pour tous réels a et b strictement positifs

$$\boxed{\ln a = \ln b \text{ équivaut à } a = b}$$

<u>Exemples</u> : Résoudre dans R les équations suivantes
1- $\ln x = \ln 2$ 2- $\ln x = 4$ 3- $\ln(3x - 2) = \ln(x - 1)$ 4 - $\ln(x^2 + 1) - \ln 2 = 0$

<u>Méthode</u> : Avant tout calcul la première chose à faire est de déterminer l'ensemble E sur lequel notre équation a un sens sachant que **<u>ln A existe si A > 0 .</u>** Ensuite on résout en vérifiant bien que les solutions trouvées sont ou non dans l'ensemble E.

1- Résoudre l'équation $\ln x = \ln 2$ équivaut à résoudre le système $\begin{cases} x \in]0 ; +\infty[\\ \ln x = \ln 2 \end{cases}$

ce qui donne $\begin{cases} x \in]0 ; +\infty[\\ x = 2 \end{cases}$ 2 est bien dans] 0 ; + ∞ [donc $S = \{2\}$

2 - Dans cette équation on remarque « qu'il n'y a pas de ln dans le terme de droite de l'équation ». Il va falloir faire « apparaître ln » grâce à la conséquence (*) du 1°).
Comme $4 = \ln e^4$ on a :
Résoudre l'équation $\ln x = 4$ équivaut à résoudre le système $\begin{cases} x \in]0 ; +\infty[\\ \ln x = \ln e^4 \end{cases}$ ce qui donne $\begin{cases} x \in]0 ; +\infty[\\ x = e^4 \end{cases}$

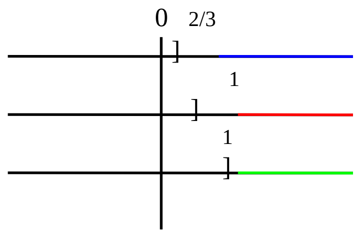
e^4 est bien dans] 0 ; + ∞ [donc $S = \{e^4\}$.

3 - Dans cette équation il y a l'inconnue x des deux côtés donc la plus grande difficulté ici sera de déterminer l'ensemble E sur lequel l'équation a un sens :

$\ln(3x - 2)$ est défini si $3x - 2 > 0$ c'est - à - dire si $x > 2/3$ soit $x \in]2/3 ; +\infty[$

$\ln(x - 1)$ est défini si $x - 1 > 0$ c'est - à - dire si $x > 1$ soit $x \in]1 ; +\infty[$

L'ensemble E sera l'intersection de ces deux intervalles soit E =] 1 ; + ∞ [



<u>Remarque</u> : pour trouver cette intersection on peut s'aider des schémas ci -dessus
« L'intersection c'est l'endroit où on peut avoir en même temps les deux couleurs » .

Résoudre l'équation ln(3x-2) = ln(x -1) équivaut à résoudre le système $\begin{cases} x \in E \\ \ln(3x-2) = \ln(x-1) \end{cases}$

ce qui donne $\begin{cases} x \in E \\ 3x-2 = x-1 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x \in E \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$

Or attention ½ $\notin$ E =] 1 ; + ∞ [donc $S = \varnothing$.

Remarque : on voit grâce à cet exemple la nécessité de toujours vérifier l'appartenance à l'ensemble de définition E des valeurs trouvées .

4 - Comme $x^2 + 1 > 0$ on a ln(x^2 + 1) défini sur R .Donc résoudre l'équation ln(x^2 + 1)- ln 2=0 équivaut à résoudre ln(x^2 + 1)= ln 2 soit $x^2 + 1 = 2$ ce qui donne encore $x^2 = 1$; On en déduite que S = {-1 ; 1} .

b) Inéquations Pour tous réels a et b strictement positifs

ln a <ln b équivaut à a < b
ln a > ln b équivaut à a > b
ln a ≤ ln b équivaut à a ≤ b
ln a ≥ ln b équivaut à a ≥ b

Exemples :

Résoudre dans R les inéquations suivantes

1- ln$x$ > ln 3 2- ln x ≤ - 2 3- ln(3x - 1) > ln (x - 1) 4 - ln(x^2 + 1) ≤ ln 2

Méthode : La méthode est la même que pour les équations sauf que la solution sera généralement un intervalle ou une réunion d'intervalles qui sera l'intersection de l'ensemble E de définition et des conditions trouvées après calculs.

1- Résoudre l'inéquation donnée équivaut à résoudre $\begin{cases} x \in \,]0\,;+\infty[\\ x > 3 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x \in \,]0\,;+\infty[\\ x \in \,]3\,;+\infty[\end{cases}$

D'où la solution qui est l'intersection de ces deux intervalles à savoir S =] 3 ; + ∞ [

2 - Résoudre l'inéquation donnée équivaut à résoudre $\begin{cases} x \in \,]0\,;+\infty[\\ \ln x \le \ln e^{-2} \end{cases}$ soit $\begin{cases} x \in \,]0\,;+\infty[\\ x \le e^{-2} \end{cases}$ $\begin{cases} x \in \,]0\,;+\infty[\\ x \in \,]-\infty\,;e^{-2}] \end{cases}$

D'où la solution qui est l'intersection de ces deux intervalles à savoir S =] 0 ; e^{-2}] .

3 - L'inéquation a un sens si 4x - 1 > 0 et x + 4 > 0 c'est - à -dire si $x \in$] ¼ ; + ∞ [et $x \in$] -4 ; + ∞ [soit si $x \in$ E =] ¼ ; + ∞ [.

Résoudre l'inéquation donnée équivaut à résoudre $\begin{cases} x \in E \\ \ln(4x-1) > \ln(x+4) \end{cases}$ soit $\begin{cases} x \in E \\ 4x-1 > x+4 \end{cases}$ $\begin{cases} x \in \,]0\,;+\infty[\\ 3x > 5 \end{cases}$

soit encore $\begin{cases} x \in \,]\frac{1}{4}\,;+\infty[\\ x \in \,]5/3\,;+\infty[\end{cases}$ D'où la solution qui est l'intersection de ces deux intervalles à savoir S =] 5/3 ; + ∞ [

4 - Résoudre l'inéquation donnée équivaut à résoudre $x^2 + 1 \le 2$ soit $x^2 - 1 \le 0$. D'après la règle sur le signe du trinôme on en déduit que S =] - ∞ ; -1] U [1 ; + ∞ [.

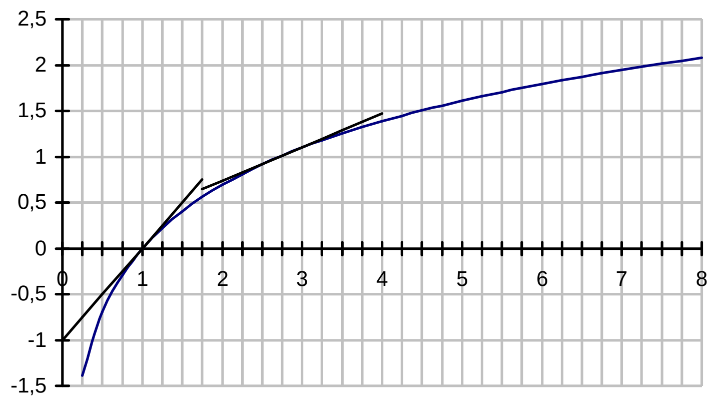
3°) Equations de deux tangentes importantes à la courbe de la fonction ln

a)Tangente au point A(1 ; 0)

y = x - 1

b)Tangente au point B(e ;1)

$y = \frac{1}{e}x$



V) Dérivées

1°) Théorème

Soit U une fonction dérivable et strictement positive sur I. La fonction f définie par sur I par f(x)= ln U(x) est dérivable sur I et

$$f' = \frac{U'}{U}$$

2°) Des exemples à retenir

a) Si f(x)= ln (x -1) avec $x \in$] 1 ; + ∞ [alors $f'(x) = \dfrac{1}{x - 1}$

b) si f(x) = ln (x - a) avec $x \in$] a ; + ∞ [alors $f'(x) = \dfrac{1}{x - a}$ (a > 0)

de même si f(x)= ln (x + b) avec $x \in$] -b ; + ∞ [alors $f'(x) = \dfrac{1}{x + b}$ (b > 0)

c) Si f(x)= ln 2x avec $x \in$] 0 ; + ∞ [alors $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

d'une façon générale si avec m > 0 f(x)= ln mx où $x \in$] 0 ; + ∞ [alors $f'(x)= \dfrac{1}{x}$

d) Si f(x) = ln (2x - 1) avec $x \in$] ½ ; + ∞ [alors $f'(x)= \dfrac{2}{2x - 1}$

de même d'une façon générale si avec m > 0 on f(x) = ln (mx + p) avec $x \in$] -p/m ; + ∞ [alors $f'(x) = \dfrac{m}{mx + p}$

VI) Autres limites

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$ (n entier naturel non nul)

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x\ln x = 0$$

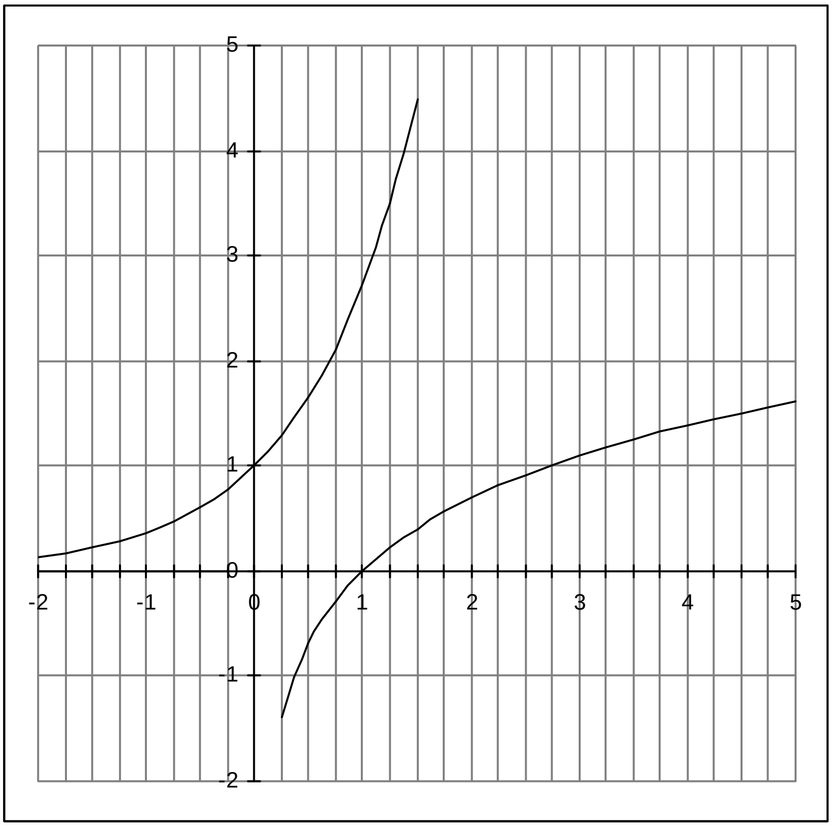
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^n \ln x = 0$$ (n entier naturel non nul)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$$

VII) Complément : La fonction logarithme décimal
Définition

$$\text{Log} :]0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \to \frac{\ln x}{\ln 10}$$

VIII) Liens avec la fonction exponentielle .



On veut résoudre les équations suivantes : a) ln x = 1 b) $e^x = 2$

Propriété

La fonction exponentielle, notée exp, est la fonction définie sur R à valeur dans]0 ; + ∞ [par :

exp : R →] 0 ; + ∞ [
x → e^x où $y = e^x$ équivaut à ln $y = x$

La fonction exp est la fonction réciproque de la fonction ln

- $\ln e^x = x$ pour tout x de R.
- $e^{\ln x} = x$ pour tout x de]0 ; + ∞[