DEVOIR DE MATHEMATIQUES N° 2 TS A REMETTRE LE 04/10/10

1- On considère la fonction f telle que :

$$f(x)=\sqrt{9x^2+6x+5}\ .$$

1° Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2° Étudier les variations de f et ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

3° Démontrer que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f dans un repère orthonormal admet la droite D d'équation $x=-\frac{1}{3}$ comme axe de symétrie.

4° a) Démontrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y=3x+1$ est asymptote à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

b) Déterminer la position de $\mathscr{C}$ par rapport à $\mathscr{D}$.

5° En utilisant les questions précédentes, démontrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique en $-\infty$ dont on donnera une équation.

2- Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=\frac{1}{x-\cos x}$$

et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1° Démontrer que l'équation $x-\cos x=0$ admet une seule solution α sur $\mathbb{R}$.

En déduire l'ensemble de définition de f.

2° a) Démontrer que, pour tout réel x supérieur à 2 :

$$\frac{1}{x+1}\leqslant f(x)\leqslant\frac{1}{x-1}\ .$$

En déduire la limite de f en $+\infty$.

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

3° Démontrer que $\mathscr{C}_f$ admet deux asymptotes que l'on déterminera.

4° Déterminer les variations de f sur ses intervalles de définition.

5° Déterminer les points de $\mathscr{C}_f$ en lesquels la tangente est horizontale.