

Correction

Exercices simples sur les aires et le calcul d'intégrales.

Ex 33

$$A = \left(\int_{0,5}^2 \frac{2}{x} dx \right) \text{ u.a}$$

$$A = \int_{0,5}^2 \frac{2}{x} dx \times 4 \text{ cm}^2 = 2 \left[\ln x \right]_{0,5}^2 \times 4 \text{ cm}^2 = 8 (\ln 2 - \ln 0,5) = 16 \ln 2 \text{ cm}^2$$

Ex 34

$$A = \left(\int_{-1}^1 e^{-x} dx \right) 2 \text{ cm}^2 = 2 (e^1 - e^{-1}) \text{ cm}^2 = 2 \left(e - \frac{1}{e} \right) \text{ cm}^2.$$

Ex 35

$$A = - \left(\int_1^3 \frac{-3}{1+2x} dx \right) 2 \text{ cm}^2 = 3 \int_1^3 \frac{2}{1+2x} dx \text{ cm}^2$$

! coïncidence!

$$A = 3 \left[\ln(1+2x) \right]_1^3 \text{ cm}^2 = 3 \ln \frac{7}{3} \text{ cm}^2.$$

Ex 36

a. $f(x) = \frac{x-2}{x+1}$

b. \mathcal{E} en-dessous de l'axe (Ox) si $x \leq 1$
 \mathcal{E} au-dessus de l'axe (Ox) si $x \geq 1$

c. $F'(x) = (ax+a+b)e^x = (x-1)e^x$

Par identification $a=1$ et $a+b=-1$ soit $a=1$ et $b=-2$

$$F(x) = (x-2)e^x.$$

d. $A = \left(- \int_{-2}^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx \right) \text{ u.a}$

$$A = - \left[F(x) \right]_{-2}^1 + \left[F(x) \right]_1^2 \text{ u.a} = -F(1) - F(-2) + F(2) - F(1) \text{ u.a}$$

$$A = 2e + \frac{4}{e^4} \text{ u.a}$$

Ex 37

a. $x \mid \begin{array}{c} 1 \\ f(x) \end{array} \begin{array}{c} e \\ + \\ \phi \\ - \end{array} \begin{array}{c} +\infty \\ \\ \end{array}$ b. ϕ au-dessous de $(0, \pi)$ si $x \leq 2$
 ϕ en-dessous de $(0, \pi)$ si $x \geq 2$.

c. $F'(x) = (-ax + b - a)e^{-x}$ $a=5$ et $b-a=10$ donc $b=15$
 $F(x) = (5x + 15)e^{-x} = 5(x+3)e^{-x}$.

d. $A = \int_1^2 f(x) dx - \int_2^4 f(x) dx = [F(x)]_1^2 - [F(x)]_2^4$

$A = F(2) - F(1) + F(2) - F(4)$ u.a

$A = 2 \times 25e^{-2} - 20e^{-1} - 35e^{-4}$ u.a

$A = \frac{50}{e^2} - \frac{20}{e} - \frac{35}{e^4}$ u.a = $\frac{50e^2 - 20e^3 - 35}{e^4}$ u.a.

Ex 38 a-b- $\ln x - 1 < 0$ si $\ln x < 1$ c'ad si $x < e$ sachant que $x > 0$, donc $S =]0; e[$.

\int_1^e

Sur $]0; e[$ ϕ_f est en-dessous de l'axe (Ox)

c. $f'(x) = \ln x$ $F(x) = x \ln x - 2x$.

d. $A = - \int_{\frac{1}{2}}^e f(x) dx \times 2 \text{ cm}^2 = - [x \ln x - 2x]_{\frac{1}{2}}^e \times 2 \text{ cm}^2$

$A = (-e + 2e + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} - 1) \times 2 \text{ cm}^2$

$A = (e - \ln 2 - 2) \text{ cm}^2$.

Ex 39

1.a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$ de m^{me} $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

ASH: $y=0$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Ex 60

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$

car $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ donc

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

b. $f(x) = 0$ éq^a $e^{-x} = 1$ c^àd $e^{-x} = e^0$ soit $x = 0$

$f' = \{0\}$

$f(x) < 0$ éq^a $e^{-x} < 1$ c^àd $e^{-x} < e^0$ soit $-x < 0$ c^àd $x > 0$

$f' =]0; +\infty[$. \mathcal{C} est en-dessous de (Ox) si $x > 0$

\mathcal{C} est au-dessus de (Ox) si $x < 0$.

c.
d. $A = \int_{-2}^0 (e^{-x} - 1) dx - \int_0^2 (e^{-x} - 1) dx$ u.a.

$A = [-e^{-x} - x]_{-2}^0 - [-e^{-x} - 1]_0^2$ u.a.

$A = -1 - 2 + e^2 + e^{-2} + 1 - 1 - 1$ u.a.

$A = -4 + e^2 + e^{-2}$ u.a.

$A = 2\left(e^2 + \frac{1}{e^2} - 4\right)$ u.a.

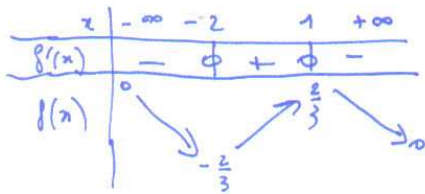
41. Si on multiplie I par l'u.a, c'est l'aire du domaine compris entre les droites d'éq $x = -1$ et $x = 3$ et les courbes de f et de g .

$$b. f'(x) = \frac{2(x^2+x+2,5) - (2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+2,5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{(x^2+x+2,5)^2} = \frac{2(-x^2 - x + 2)}{(x^2+x+2,5)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2(-x-2)(x-1)}{(x^2+x+2,5)^2}$$

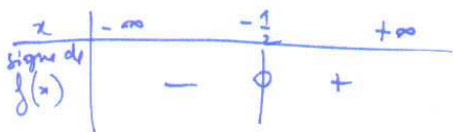
D'après la règle du signe du trinôme comme $f'(x)$ est du signe de $-x^2-x+2$ c'est-à-dire de $(-x-2)(x-1)$ on a



$$f(-2) = \frac{-3}{4,5} = -\frac{2}{3}$$

$$f(1) = \frac{3}{4,5} = \frac{2}{3}$$

2. $x^2+x+2,5 > 0$ pour tout réel x donc $f(x)$ est du signe de $2x+1$



\mathcal{C} est au-dessous de (Ox) sur $]-\infty; -\frac{1}{2}[$

\mathcal{C} est au-dessus de (Ox) sur $]-\frac{1}{2}; +\infty[$

$$3. h. A = - \int_{-2}^{-\frac{1}{2}} f(x) dx + \int_{-\frac{1}{2}}^1 f(x) dx \quad \text{U.A.} = - \left[\ln(x^2+x+2,5) \right]_{-2}^{-\frac{1}{2}} + \left[\ln(x^2+x+2,5) \right]_{-\frac{1}{2}}^1 \quad \text{U.A.}$$

$$A = - \left[\ln \frac{9}{4} - \ln \frac{9}{2} \right] + \ln \frac{9}{2} - \ln \frac{9}{4} \times h \text{ cm}^2$$

$$A = 2 \left(\ln \frac{9}{2} - \ln \frac{9}{4} \right) \times h \text{ cm}^2 = \boxed{8 \ln 2 \text{ cm}^2}$$

$$A \approx 5,54 \text{ cm}^2$$