Correction

Exercices simples sur les aires et le calcul d'intégrales.

Ex33

$$\mathcal{A} = \left(\int_{0,5}^{2} \frac{2}{x}\,dx\right)\ \text{U.a}$$

$$\mathcal{A} = \int_{0,5}^{2} \frac{2}{x}\,dx \times 4\ \text{cm}^2 = 2\left[\ln x\right]_{0,5}^{2} \times 4\ \text{cm}^2 = 8(\ln 2 - \ln 0{,}5) = 16\ln 2\ \text{cm}^2$$

Ex34

$$\mathcal{A} = \left(\int_{-1}^{1} e^{-x}\,dx\right) 2\ \text{cm}^2 = 2\left(e^{1} - e^{-1}\right)\text{cm}^2 = 2\left(e - \frac{1}{e}\right)\text{cm}^2.$$

Ex35

$$\mathcal{A} = -\left(\int_{1}^{3} -\frac{3}{1+2x}\,dx\right) 2\ \text{cm}^2 = 3\int_{1}^{3} \frac{2}{1+2x}\,dx\ \text{cm}^2$$

⚠ $f < 0$ ici !

$$\mathcal{A} = 3\left[\ln(1+2x)\right]_{1}^{3}\ \text{cm}^2 = 3\ln\frac{7}{3}\ \text{cm}^2.$$

Ex36

a.

x	$-\infty$		1		2
$f(x)$		$-$	0	$+$	

b. $\mathcal{C}$ en-dessous de l'axe (Ox) si $x \leq 1$

$\mathcal{C}$ au-dessus de l'axe (Ox) si $x \geq 1$

c. $F'(x) = (ax + a + b)e^{x} = (x-1)e^{x}$

Par identification $a = 1$ et $a+b = -1$ soit $a = 1$ et $b = -2$

$F(x) = (x-2)e^{x}$.

d. $$\mathcal{A} = \left(-\int_{-2}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx\right)\ \text{U.a}$$

$$\mathcal{A} = -\left[F(x)\right]_{-2}^{1} + \left[F(x)\right]_{1}^{2}\ \text{U.a} = -F(1) - F(-2) + \underset{0}{\underset{\parallel}{F(2)}} - F(1)\ \text{U.a}$$

$$\mathcal{A} = 2e + \frac{4}{e^{4}}\ \text{U.a}$$

Ex 37

a.

x	1		e		$+\infty$
$f(x)$		+	ϕ	−	

b. $\mathcal{C}$ au-dessus de (Ox) si $x \leq 2$
$\mathcal{C}$ en-dessous de (Ox) si $x \geq 2$.

c. $F'(x) = (-ax + b - a)e^{-x}$ $a = 5$ et $b - a = 10$ donc $b = 15$

$F(x) = (5x + 15)e^{-x} = 5(x+3)e^{-x}$.

d. $\mathcal{A} = \int_1^2 f(x)\,dx - \int_2^4 f(x)\,dx$ ua $= \left[F(x)\right]_1^2 - \left[F(x)\right]_2^4$ ua

$\mathcal{A} = F(2) - F(1) + F(2) - F(4)$ u.a

$\mathcal{A} = 2 \times 25e^{-2} - 20e^{-1} - 35e^{-4}$ u.a

$\mathcal{A} = \frac{50}{e^2} - \frac{20}{e} - \frac{35}{e^4}$ u.a $= \frac{50e^2 - 20e^3 - 35}{e^4}$ u.a.

Ex 38 a-b- $\ln x - 1 < 0$ ssi $\ln x < \ln e$ càd ssi $x < e$ sachant que $x > 0$, donc $S' =]0;e[$.

Sur $]0;e[$ $\mathcal{C}_f$ est en-dessous de l'axe (Ox)

$+ \vec{j}$

c. $H'(x) = \ln x$ $F(x) = x\ln x - 2x$.

d. $\mathcal{A} = -\int_{\frac{1}{2}}^{e} f(x)\,dx \times 2\,cm^2 = -\left[x\ln x - 2x\right]_{\frac{1}{2}}^{e} \times 2\,cm^2$

$\mathcal{A} = \left(-e + 2e + \frac{1}{2}\ln\frac{1}{2} - 1\right) \times 2\,cm^2$

$\mathcal{A} = (e - \ln 2 - 2)\,cm^2$.

Ex39

1.a. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ de m $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

ASH : $y = 0$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Ex 40

a. $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x}} = 0$

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{e^{x}} = +\infty$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0^+$ donc

$\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$

b. . $f(x) = 0$ éqà $e^{-x} = 1$ càd $e^{-x} = e^{0}$ soit $x = 0$

$S' = \{0\}$

. $f(x) < 0$ éqà $e^{-x} < 1$ càd $e^{-x} < e^{0}$ soit $-x < 0$ càd $x > 0$

$S' =]0;+\infty[$. $\mathcal{C}$ est en-dessous de (Ox) si $x > 0$

$\mathcal{C}$ est au-dessus de (Ox) si $x < 0$.

c.

d. $\mathcal{A} = \int_{-2}^{0} (e^{-x} - 1)\,dx - \int_{0}^{2} (e^{-x} - 1)\,dx$ U.a

$\mathcal{A} = \left[-e^{-x} - x\right]_{-2}^{0} - \left[-e^{-x} - x\right]_{0}^{2}$ U.a

$\mathcal{A} = -1 - 2 + e^{2} + e^{-2} + \cancel{1} - \cancel{1} - 1$ U.a

$\mathcal{A} = -4 + e^{2} + e^{-2}$ U.a

$\mathcal{A} = 2\left(e^{2} + \frac{1}{e^{2}} - 4\right)$. cm^2

41. Si on multiplie I par l'U.a, c'est l'aire du domaine compris entre les dtes d'éq $x = -1$ et $x = 3$ et les courbes de f et de g.

b. $f'(x) = \dfrac{2(x^2+x+2,5) - (2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+2,5)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 4}{(x^2+x+2,5)^2} = \dfrac{2(-x^2 - x + 2)}{(x^2+x+2,5)^2}$

$f'(x) = \dfrac{2(-x-2)(x-1)}{(x^2+x+2,5)^2}$

D'après la règle du le signe du trinôme comme $f'(x)$ est du signe de $-x^2-x+2$ càd de $(-x-2)(x-1)$ on a

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{3}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	0

$f(-2) = \dfrac{-3}{4,5} = -\dfrac{2}{3}$

$f(1) = \dfrac{3}{4,5} = \dfrac{2}{3}$

2. $x^2+x+2,5>0$ pour tout réel x donc $f(x)$ est du signe de $2x+1$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

$\mathcal{C}$ est en-dessous de (Ox) sur $]-\infty;-\frac{1}{2}]$

$\mathcal{C}$ est au-dessus de (Ox) sur $[-\frac{1}{2};+\infty[$

3. b. $\mathcal{A} = -\displaystyle\int_{-2}^{-\frac{1}{2}} f(x)\,dx + \int_{-\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx$ u.a $= -\left[\ln(x^2+x+2,5)\right]_{-2}^{-\frac{1}{2}} + \left[\ln(x^2+x+2,5)\right]_{-\frac{1}{2}}^{1}$ u.a

$\mathcal{A} = -\left[\ln\frac{9}{4} - \ln\frac{9}{2}\right] + \ln\frac{9}{2} - \ln\frac{9}{4} \times 4\text{ cm}^2$

$\mathcal{A} = 2\left(\ln\frac{9}{2} - \ln\frac{9}{4}\right) \times 4\text{ cm}^2 = \boxed{8\ln 2\text{ cm}^2}$

$\mathcal{A} \simeq 5,54\text{ cm}^2$