CORRECTION DES EXERCICES P 45

Exercice 115 p 45

1. Pour tout réel x on a $f(-x) = \cos(-x) - \cos^2(-x) = \cos x - \cos^2 x = f(x)$. la fonction f est donc paire.
2. Pour tout réel x on a $f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) - \cos^2(x + 2\pi) = \cos x - \cos^2 x = f(x)$

la fonction f est donc périodique de période 2π.

3. Il suffit donc de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π centré en 0, pour utiliser la symétrie de la parité. Ainsi $[0\ ;\ \pi]$ suffit.

4. Sur $[0\ ;\ \pi]$, $f'(x) = \sin x(-1 + 2\cos x)$, et donc :

$f'(x) = 0$ si, et seulement si : $x = 0\ ;\ \dfrac{\pi}{3}\ ;\ \pi$.

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	-2

Exercice 116 p 45

1. Soit $x \in \mathbb{R}$: $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right)$

$$= \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

2. Ainsi la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\left(k - \frac{1}{4}\right)\pi \ /\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathcal{D}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(x + \pi) = \dfrac{\sin(x + \pi)}{\sin(x + \pi) + \cos(x + \pi)} = f(x)$.

Donc, il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle le longueur π.

4. Soit x tel que $\dfrac{\pi}{4} - x$ et $\dfrac{\pi}{4} + x$ sont dans $\mathbb{R}$.

$$f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + f\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2}\cos x} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\sqrt{2}\cos x} = \frac{1}{2}.$$

5. De la périodicité, il résulte un intervalle de longueur π.

Soit $\left]\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right[$ et, de la question précédente, on déduit que $\left]-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{\pi}{4}\right]$ est suffisant.

6. Sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{\cos x(\cos x + \sin x) - (\cos x - \sin x)\sin x}{(\cos x + \sin x)^2}.$$

Soit $f'(x) = \dfrac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$, donc f est strictement croissante sur cet intervalle. On remarque que :

$$\lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{4} \\ x > -\frac{\pi}{4}}} (\cos x + \sin x) = \lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{4} \\ x > -\frac{\pi}{4}}} \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0^+, \text{ d'où } \lim_{\substack{x \to -\frac{\pi}{4} \\ x > -\frac{\pi}{4}}} f(x) = -\infty.$$

7. Ce théorème de la bijection permet alors de prouver l'existence et l'unicité de la solution de l'équation $f(x) = 5$ dans $\left]-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right[$.

9. La fonction est continue et strictement dérivable sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right[$. $5 \in f\left]-\frac{\pi}{4}\ ;\ \frac{3\pi}{4}\right[$, du théorème de bijection on en déduit l'existence et l'unicité de la solution.