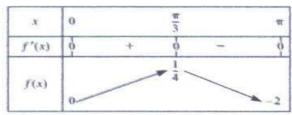
CORRECTION DES EXERCICES P 45

Exercice 115 p 45

- 1. Pour tout réel x on a f $(-x) = \cos(-x) \cos^2(-x) = \cos x \cos^2 x = f(x)$. la fonction f est donc paire.
- 2. Pour tout réel x on a f $(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) \cos^2(x + 2\pi) = \cos x \cos^2 x = f(x)$ la fonction f est donc périodique de période 2π .
 - 3. Il suffit donc de l'étudier sur un intervalle de longueur 2π centré en 0, pour utiliser la symétrie de la parité. Ainsi $\{0;\pi\}$ suffit.
 - 4. Ser $[0; \pi]$, $f'(x) = \sin x(-1 + 2\cos x)$, et donc:

$$f'(x) = 0$$
 si, et soulement si : $x = 0$; $\frac{\pi}{3}$; π



Exercice 116 p 45

Soit
$$x \in \mathbb{R}$$
: $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \right)$
$$= \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

- 2. Ainsi la fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \left(k \frac{1}{4}\right) \pi \wedge k \in \mathbb{Z} \right\} = \mathcal{D}$.
- 3. Soit $x \in \mathbb{R}$: $f(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\sin(x+\pi) + \cos(x+\pi)} = f(x)$.

Donc, il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle le longueur $\,\pi\,$

4. Soit x tel que $\frac{\pi}{4} - x$ et $\frac{\pi}{4} + x$ sont dans \mathbb{R}

$$f\left(\frac{\pi}{4} - x\right) + f\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}{\sqrt{2}\cos x} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\sqrt{2}\cos x} = \frac{1}{2}$$

5. De la périodicité, il résulte un intervalle de longueur π

Soit $\left|\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right|$ et, de la question précédente, on déduit que $\left|-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right|$ est suffisant.

6. Sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{\cos x(\cos x + \sin x) - (\cos x - \sin x)\sin x}{(\cos x + \sin x)^2}$$

Soit $f'(x) = \frac{1}{(\cos x + \sin x)^2}$, donc f est strictement croissante sur cet intervalle. On remarque que:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} (\cos x + \sin x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0^+ , \text{ d'où } \lim_{x \to -\frac{\pi}{4}} f(x) = -\infty .$$

$$x > -\frac{\pi}{4}$$

$$x > -\frac{\pi}{4}$$

$$x > -\frac{\pi}{4}$$

$$x > -\frac{\pi}{4}$$

- 7. Ce théorème de la bijection permet alors de prouver l'existence et l'unicité de la solution de l'équation f(x) = 5 dans $\left[-\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4} \right]$.
- 9. La fonction est continue et strictement dérivable sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}\,;\frac{3\,\pi}{4}\right[\ ,\ 5\in f\ \left]-\frac{\pi}{4}\,;\frac{3\,\pi}{4}\right[\ ,\ du\ théorème de bijection on en déduit l'existence et l'unicité de la solution.$